Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Agnieszka Gergont

O izomorfizmach i izomorficznych włożeniach pomiędzy L_1-predualnymi. Zastosowania.

Rozprawa doktorska napisana pod opieką
dr. hab. Łukasza Piaseckiego

Lublin 2022

Wstęp

Izomorficzna teoria przestrzeni Banacha stanowi niewątpliwie jeden z klasycznych obszarów badań analizy funkcjonalnej. Istotną częścią tych badań są próby oszacowania dystorsji izomorficznych włożeń, a w szczególności uzyskania dokładnych wartości odległości Banacha-Mazura pomiędzy wybranymi izomorficznymi przestrzeniami Banacha. Tematyka ta została zainicjowana przez Stefana Banacha w słynnej monografii [6]. Mianowicie zdefiniował on wielkość zwaną dzisiaj odległością Banacha-Mazura oraz wprowadził ściśle związane z nią pojęcie przestrzeni prawie izometrycznych. Przypomnijmy, że dla przestrzeni Banacha X i Y, przekształcenie liniowe $T : X \to Y$ nazywane jest izomorficznym włożeniem, jeśli istnieją $a, b > 0$ takie, że dla każdego $x \in X$

$$a \|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant b \|x\| .$$

Dystorsją izomorficznego włożenia $T : X \to Y$ nazywamy liczbę $\|T\| \|T^{-1}\|$, gdzie T^{-1} oznacza operator odwrotny do izomorfizmu T działającego ze zbioru X na jego obraz $T(X)$, natomiast odległością Banacha-Mazura pomiędzy izomorficznymi przestrzeniami Banacha X i Y nazywamy liczbę

$$d(X,Y) = \inf \left\{ \ln \left(\|T\| \|T^{-1}\| \right) : T \text{ jest izomorfizmem z } X \text{ na } Y \right\}.$$

W przypadku, gdy $d(X,Y) = 0$, przestrzenie X i Y nazywamy prawie izometrycznymi.

Przedmiotem wspomnianej wcześniej ścieżki badań są w szczególności pewne klasy przestrzeni Banacha określanych mianem przestrzeni Lindenstraussa. Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha X nazywamy przestrzenią Lindenstraussa lub L_1-predualną, jeżeli jej dualna X^* jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $L_1(\mu)$ dla pewnej miary μ. Możemy wyróżnić kilka klas przestrzeni Banacha, które mają tę własność. Należą do nich chociażby przestrzenie $C_0(K)$, gdzie K jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa i $C_0(K)$ oznacza przestrzeń Banacha wszystkich funkcji ciągłych $f : K \to \mathbb{R}$ znikających w nieskończoności, wyposażoną w normę supremum. W szczególności, gdy K jest zwartą przestrzenią Hausdorffa, przestrzeń $C_0(K)$ zwyczajowo oznaczamy przez $C(K)$. Należy podkreślić, że właśnie ta klasa przestrzeni była dotychczas głównym obiektem badań w kontekście odległości Banacha-Mazura w obrębie L_1-predualnych (patrz rozdział 2). W przedłożonej rozprawie zajmiemy się badaniem wspomnianych zagadnień w przypadku innych podklas L_1-predualnych. Mianowicie będziemy rozważać przykłady przestrzeni z klas szerszych niż wspomniana klasa przestrzeni $C_0(K)$, tj. M przestrzeni oraz G przestrzeni. Klasy te zostaną omówione w rozdziale pierwszym. Przedmiotem naszych rozważań będzie również rodzina przestrzeni $A(S)$, gdzie $A(S)$ oznacza przestrzeń Banacha funkcji afinicznych i ciągłych na sympleksie Choqueta S, wyposażoną w normę supremum. Należy podkreślić, że klasa ta jest ściśle większa od klasy

przestrzeni $C(K)$ (patrz Przykład 1.0.6). Klasa przestrzeni $A(S)$ zasłynęła z fundamentalnej roli jaką odegrała w teorii zwanej obecnie teorią Choqueta. Do jej kluczowych wyników należą twierdzenie Choqueta-Bishopa-de Leeuw oraz twierdzenie Choqueta-Meyera. Obszerne omówienie zagadnień tej teorii możemy znaleźć w monografii [54]. Niedawno okazało się, że klasa przestrzeni $A(S)$ odgrywa ważną rolę również w metrycznej teorii punktów stałych. Otóż, jeżeli X jest ośrodkową L_1-predualną, to X^* nie ma słabej* własności punktu stałego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ilorazowa przestrzeni X izometryczna z pewną nieskończenie wymiarową przestrzenią $A(S)$ (patrz [20]); przestrzeń X^* ma słabą* własność punktu stałego (w skrócie $\sigma(X^*, X)$-WPS), jeśli dla każdego niepustego, wypukłego, słabo* zwartego podzbioru C tej przestrzeni, każde nieoddalające przekształcenie (tj. przekształcenie $T : C \to C$ takie, że $\|T(x) - T(y)\| \leqslant \|x - y\|$ dla dowolnych $x, y \in C$) ma punkt stały. Należy podkreślić, że w powyższej charakteryzacji przestrzeń $A(S)$ nie może być zastąpiona przez żadną z przestrzeni $C(K)$. Ponadto określenie "ilorazowa" nie może zostać zastąpione określeniem "podprzestrzeń". Klasa przestrzeni $A(S)$ odgrywa kluczową rolę również w teorii przestrzeni wielościennych w kontekście charakteryzacji przestrzeni Banacha mających własność rozszerzania dla operatorów zwartych. Przypomnijmy, że wielościenną określamy taką przestrzeń Banacha X, dla której domknięta kula jednostkowa dowolnej skończenie wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni X jest wielościanem (tzn. ma skończoną liczbę punktów ekstremalnych); natomiast mówimy, że przestrzeń Banacha X ma własność rozszerzania dla operatorów zwartych (w skrócie WROZ), jeśli dla dowolnych przestrzeni Banacha $Y \subset Z$, każdy operator zwarty $T : Y \to X$ dopuszcza zwarte rozszerzenie $\widetilde{T} : Z \to X$ z $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Mianowicie okazuje się, że nieskończenie wymiarowa L_1-predualna X ma WROZ wtedy i tylko wtedy, gdy X nie zawiera izometrycznej kopii żadnej nieskończenie wymiarowej przestrzeni $A(S)$. Wynik ten stanowi jeden z głównych wyników tej rozprawy (Twierdzenie 4.2.6). Dowód Twierdzenia 4.2.6 opiera się na innej znanej charakteryzacji L_1-predualnych mających WROZ (Twierdzenie 4.2.3) oraz najnowszym wyniku M. Zippina (Twierdzenie 4.2.4). Należy podkreślić, że teoria przestrzeni wielościennych w obrębie L_1-predualnych została w ostatnich latach znacznie przebudowana i rozwinięta (patrz [23, 22, 55]).

Niezwykle ważną w kontekście badań będących przedmiotem przedłożonej rozprawy klasą L_1-predualnych jest klasa $\mathcal{H}$ złożona z ℓ_1-predualnych hiperpłaszczyzn w przestrzeni c ciągów zbieżnych. Przedstawia ona izometryczne modele wszystkich ℓ_1-predualnych, dla których standardowa baza w ℓ_1 jest słabo* zbieżna. Klasa ta zostanie dokładnie omówiona w rozdziale pierwszym. W tym miejscu wspomnimy jedynie, że dla danego $e^* \in \ell_1$ takiego, że $\|e^*\| \leqslant 1$, przez W_{e^*} będziemy oznaczać ℓ_1-predualną hiperpłaszczyznę w c, dla której standardowa baza w $\ell_1 = W_{e^*}^*$ jest słabo* zbieżna do e^*. Do najprostszych przykładów ℓ_1-predualnych hiperpłaszczyzn w c możemy zaliczyć przestrzeń c oraz jej podprzestrzeń c_0 ciągów zbieżnych do zera. Klasa $\mathcal{H}$ odgrywa ważną rolę zarówno w teorii punktów stałych, jak również teorii przestrzeni wielościennych (patrz [19, 23, 22, 21, 55, 56, 20]), w tym wspomnianej wcześniej charakteryzacji L_1-predualnych mających WROZ (Twierdzenie 4.2.6). Otóż wykażemy, że L_1-predualna X ma WROZ wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera izometrycznej kopii żadnej hiperpłaszczyzny W_{e^*} zawierającej element $(1, 1, 1, \dots) \in c$.

Przedmiotem rozważań w mojej rozprawie będą również ℓ_∞^n-sumy proste oraz c_0-sumy proste ℓ_1-predualnych hiperpłaszczyzn w c. Ich zbiór będziemy oznaczać przez $\mathcal{F}$.

Należy również wspomnieć, że w tej rozprawie istotną rolę odegrają L_1-predualne X sklasyfikowane na podstawie usytuowania słabych* punktów skupienia zbioru wszystkich punktów

ekstremalnych domkniętej kuli jednostkowej w przestrzeni X^*. Mianowicie będziemy badać L_1-predualne X, dla których $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$, tzn. zbiór wszystkich słabych* punktów skupienia zbioru wszystkich punktów ekstremalnych domkniętej kuli jednostkowej w przestrzeni X^* jest zawarty w domkniętej kuli o promieniu $0 \leqslant r < 1$. Przestrzenie te mają pewne klasyczne geometryczne własności (patrz [22, 21, 55]), w szczególności będące przedmiotem naszego zainteresowania wielościenność, własność rozszerzania dla operatorów zwartych oraz słabą* własność punktu stałego.

Jak wspomnieliśmy wcześniej, niniejsza rozprawa doktorska poświęcona jest badaniom dotyczącym odległości Banacha-Mazura pomiędzy wybranymi L_1-predualnymi oraz pewnych zastosowań uzyskanych wyników.

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów. Pierwsze dwa rozdziały służą wprowadzeniu do zagadnień stanowiących przedmiot rozprawy.

Rozdział pierwszy zawiera podstawowe definicje i fakty dotyczące wspomnianych wcześniej, wybranych klas L_1-predualnych.

Pierwsza część drugiego rozdziału stanowi przegląd najważniejszych wyników dotyczących odległości Banacha-Mazura pomiędzy przestrzeniami $C_0(K)$, natomiast druga część poświęcona jest zagadnieniu prawie izometrycznych ℓ_1-predualnych.

Kolejne dwa rozdziały stanowią główną część mojej rozprawy. Prezentują one serię nowych wyników, w tym część nieopublikowanych.

Rozdział trzeci dotyczy izomorficznych włożeń oraz izomorfizmów pomiędzy pewnymi L_1-predualnymi. Udowodnimy w nim, że jeżeli X jest nieskończenie wymiarową L_1-predualną taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$, to dla każdego izomorficznego włożenia T z c w X mamy

$$\|T\| \, \|T^{-1}\| \geqslant \frac{3-r}{1+r}$$

(Twierdzenie 3.1.3). Ponadto wykażemy, że dla każdego $r \in (0,1)$ oszacowanie to jest dokładne (patrz Przykład 3.1.9). Następnie udowodnimy ogólniejszy wynik, w którym przestrzeń c zostanie zastąpiona przez hiperpłaszczyznę W_{e^*}. Mianowicie pokażemy, że jeżeli $e^* \in B_{\ell_1}$ i X jest nieskończenie wymiarową L_1-predualną taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < \|e^*\|$, to dla każdego izomorficznego włożenia T z W_{e^*} w X mamy

$$\|T\| \, \|T^{-1}\| \geqslant \frac{1+2\|e^*\|-r}{1+r}$$

(Twierdzenie 3.2.1). Ponadto wykażemy, że dla dowolnego $0 \leqslant r < 1$ i dowolnej hiperpłaszczyzny W_{e^*} takiej, że $\|e^*\| > r$, powyższe oszacowanie jest dokładne (patrz Przykład 3.2.4). W ostatniej części tego rozdziału podamy nieopublikowany dotąd wynik dotyczący oszacowania dystorsji dowolnego izomorfizmu z ℓ_1-predualnej X na c_0. Mianowicie wykażemy, że jeżeli X jest ℓ_1-predualną izomorficzną z c_0, to dla dowolnego izomorfizmu $T : X \to c_0$ mamy

$$\|T\| \, \|T^{-1}\| \geqslant 1 + 2r^*(X),$$

gdzie $r^*(X) = \inf\{r > 0 : (\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}\}$ (Twierdzenie 3.3.1). Oszacowanie to jest dokładne (patrz Uwaga 3.3.7).

W rozdziale czwartym zaprezentujemy kilka zastosowań wyników otrzymanych w rozdziale trzecim. Na początku sformułujemy wynik dotyczący stabilności wielościenności w obrębie L_1-predualnych. Stanowi on, że jeżeli X jest nieskończenie wymiarową L_1-predualną

taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$, Y jest L_1-predualną izomorficzną z X i $d(X,Y) < \ln \frac{3-r}{1+r}$, to Y jest przestrzenią wielościenną (Wniosek 4.1.3). Należy podkreślić, że oszacowanie to jest dokładne dla każdego $r \in [0,1)$ (patrz Przykład 3.1.9). Wynik ten jest konsekwencją Twierdzenia 3.1.3 i znanego faktu, że L_1-predualna jest przestrzenią wielościenną wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera izometrycznej kopii przestrzeni c (Twierdzenie 4.1.2). Warto zaznaczyć, że badanie stabilności własności wielościenności w obrębie wszystkich przestrzeni Banacha jest bezprzedmiotowe (patrz Uwaga 4.1.4).

Następnie podamy analogiczny wynik dotyczący stabilności własności rozszerzania dla operatorów zwartych. Wykażemy, że jeżeli X jest nieskończenie wymiarową L_1-predualną taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$, Y jest L_1-predualną izomorficzną z X i $d(X,Y) < \ln \frac{3-r}{1+r}$, to Y ma WROZ (Twierdzenie 4.2.8). W tym celu, wraz z Twierdzeniem 3.1.3 wykorzystana zostanie nowa, wyżej wspomniana charakteryzacja L_1-predualnych mających WROZ (Twierdzenie 4.2.6). Warto podkreślić, że oszacowanie uzyskane w Twierdzeniu 4.2.8 jest dokładne dla każdego $r \in [0,1)$ (patrz Przykład 3.1.9). Przypomnijmy, że każda przestrzeń Banacha mająca WROZ musi być wielościenną L_1-predualną [45], wobec czego badanie stabilności WROZ w obrębie L_1-predualnych jest naturalne.

W dalszej części rozprawy zajmiemy się badaniem topologicznych i metrycznych własności przestrzeni $(\mathcal{H},d)$, gdzie d oznacza odległość Banacha-Mazura, przy czym utożsamiamy ze sobą prawie izometryczne hiperpłaszczyzny. Wykażemy, że przestrzeń $(\mathcal{H},d)$ jest homeomorficzna z przestrzenią (K, d_{ℓ_1}), gdzie

$$K = \{x \in \ell_1 : \|x\| \leqslant 1 \text{ i } x(i) \geqslant x(i+1) \geqslant 0 \text{ dla wszystkich } i \in \mathbb{N}\}$$

i $d_{\ell_1}(x,y) = \|x-y\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i) - y(i)|$ dla wszystkich $x, y \in K$ (Twierdzenie 4.3.1). Zauważmy, że z Twierdzenia 4.3.1 możemy natychmiast wywnioskować pewne topologiczne własności przestrzeni $(\mathcal{H},d)$. Otóż nietrudno zauważyć, że przestrzeń K jest ośrodkowa i nie jest lokalnie zwarta w żadnym punkcie (patrz Uwaga 4.3.8), a wobec tego $\mathcal{H}$ również. Następnie, ponieważ zbiór K jest wypukły, Twierdzenie 4.3.1 pokazuje, że przestrzeń $\mathcal{H}$ jest ściągalna oraz ilustruje mnogość ścieżek w przestrzeni $\mathcal{H}$ łączących jej dwa dowolne elementy. W kolejnej części rozdziału podamy konstrukcję homotopii ściągającej $\mathcal{H}$ do c_0 wzdłuż najkrótszych ścieżek w $\mathcal{H}$ oraz policzymy długość każdej z nich (Twierdzenie 4.3.9). W szczególności wykażemy, że najkrótsza krzywa w $\mathcal{H}$ łącząca c z c_0 ma długość $\ln 4$. Należy podkreślić, że w dowodzie Twierdzenia 4.3.9 wykorzystamy uzyskane przez nas wyniki dotyczące dokładnych oszacowań dystorsji izomorficznych włożeń wraz z przykładami optymalnych izomorfizmów pomiędzy odpowiednimi ℓ_1-predualnymi hiperpłaszczyznami w c (Twierdzenie 3.2.1 i Przykład 3.2.4).

Ostatnia część rozdziału czwartego poświęcona jest zagadnieniu stabilności słabej* własności punktu stałego w obrębie ℓ_1-predualnych. W tej części pracy podamy dokładne wartości stałych stabilności dla słabej* własności punktu stałego w klasie $\mathcal{H}$ (Twierdzenie 4.4.18) oraz w klasie $\mathcal{F}$ (Twierdzenie 4.4.19). Następnie wprowadzimy nową stałą stabilności opartą na metryce ścieżkowej i podamy dokładne wartości tej stałej w przypadku przestrzeni $(\mathcal{H},d)$ (Twierdzenie 4.4.20) oraz $(\mathcal{F},d)$ (Twierdzenie 4.4.21).

Ponadto niniejsza rozprawa zawiera liczne przykłady i rysunki ilustrujące omawiane zagadnienia.

W rozprawie używamy standardowych oznaczeń. Dla zadanej nieskończenie wymiarowej rzeczywistej przestrzeni Banacha X symbolami B_X i S_X oznaczamy, odpowiednio, *domkniętą*

kulę jednostkową i *sferę jednostkową* w X. Przez X^* oznaczamy przestrzeń *dualną (sprzężoną)* do X. Jeśli $A \subset X$, to $\overline{A}$, $\operatorname{int} A$, $\operatorname{conv} A$, $\operatorname{lin} A$ oraz $\operatorname{ext} A$ oznaczają, odpowiednio, *domknięcie* zbioru A w X, *wnętrze* zbioru A, *otoczkę wypukłą* zbioru A, *otoczkę liniową* zbioru A oraz zbiór wszystkich *punktów ekstremalnych* zbioru A. Jeśli $A \subset X^*$, to przez $\overline{A}^*$ oznaczamy *słabe** *domknięcie* zbioru A, natomiast przez A' *zbiór wszystkich słabych** *punktów skupienia* zbioru A :

$$A' = \left\{ x^* \in X^* : x^* \in \overline{(A \setminus \{x^*\})}^* \right\}.$$

Jeżeli $A \subset X^*$, to ${}^\perp A$ oznacza *anihilator* zbioru A w X. Jeśli $f \in X^*$, to przez $\ker f$ oznaczamy *jądro funkcjonału* f tzn. $\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Mówimy, że (domknięta) podprzestrzeń Y przestrzeni X jest *hiperpłaszczyzną* w X, jeśli $Y = \ker f$ dla pewnego $f \in S_{X^*}$. Ponadto dla $x \in S_X$, przez $D(x)$ oznaczamy zbiór

$$D(x) = \{x^* \in S_{X^*} : x^*(x) = 1\}.$$

Fakt, że X zawiera izometryczną kopię przestrzeni Y zapisujemy jako $Y \subset X$. Jeśli X jest izometrycznie izomorficzna z Y, to piszemy $X = Y$.

Niech $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Przez $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (lub krócej $L_1(\mu)$) rozumiemy przestrzeń klas równoważności funkcji mierzalnych $f : \Omega \to \mathbb{R}$ takich, że $\int_\Omega |f| d\mu < \infty$, ze względu na relację równości prawie wszędzie, z normą

$$\|f\| = \int\limits_\Omega |f| d\mu.$$

Przypomnijmy, że punkty ekstremalne kuli $B_{L_1(\mu)}$ są postaci $\lambda \cdot \chi_A$ p.w., gdzie A jest atomem miary μ, χ_A jest funkcją charakterystyczną zbioru A oraz λ jest taką liczbą rzeczywistą, że $|\lambda| = \mu(A)^{-1}$.

Następnie przez $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (lub krócej $L_\infty(\mu)$) oznaczamy przestrzeń klas równoważności funkcji mierzalnych $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *istotnie ograniczonych* tj. takich, że $\sup_{x \in \Omega \setminus A} |f(x)| < \infty$ dla pewnego zbioru $A \in \mathcal{A}$ takiego, że $\mu(A) = 0$. Normę w przestrzeni $L_\infty(\mu)$ określa się jako *supremum istotne* funkcji f w Ω tj.

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |f(x)| = \inf \{k > 0 : |f(x)| \leqslant k \text{ dla p.w. } x \in \Omega\}.$$

Oczywiście $\operatorname{ext} B_{L_\infty(\mu)} = \{f \in L_\infty(\mu) : |f(x)| = 1 \text{ dla p.w. } x \in \Omega\}$.

W przypadku, gdy dla zadanego zbioru Γ przyjmiemy, że μ jest miarą liczącą w tym zbiorze, to zamiast $L_1(\Gamma, 2^\Gamma, \mu)$ i $L_\infty(\Gamma, 2^\Gamma, \mu)$ piszemy odpowiednio $\ell_1(\Gamma)$ oraz $\ell_\infty(\Gamma)$. Warto nadmienić, że przestrzeń $\ell_1(\Gamma)$ możemy utożsamiać z przestrzenią wszystkich elementów $x = (x(\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ takich, że $\sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)| < \infty$, przy czym tylko co najwyżej przeliczalnie wiele składników jest niezerowych, z normą

$$\|x\| = \sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|.$$

Natomiast przestrzeń $\ell_\infty(\Gamma)$ możemy utożsamiać z przestrzenią wszystkich elementów $x = (x(\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ takich, że $\sup_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)| < \infty$, z normą

$$\|x\| = \sup_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|.$$

W szczególności, gdy $\Gamma = \mathbb{N}$, $\ell_1(\mathbb{N})$ i $\ell_\infty(\mathbb{N})$ oznaczamy odpowiednio przez ℓ_1 oraz ℓ_∞.

Dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ element $e^*_\gamma \in \ell_1(\Gamma)$ określamy przez $e^*_\gamma(j) = \delta_{\gamma,j}$, gdzie $\delta_{\gamma,j} = 1$, gdy $j = \gamma$ oraz $\delta_{\gamma,j} = 0$, gdy $j \in \Gamma \setminus \{\gamma\}$. W szczególności, w przypadku przestrzeni ℓ_1, (e^*_n) oznacza jej standardową bazę Schaudera. Warto odnotować, że $\operatorname{ext} B_{\ell_1(\Gamma)} = \{\pm e^*_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ oraz $\operatorname{ext} B_{\ell_\infty(\Gamma)} = \{(x(\gamma))_{\gamma\in\Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma) : |x(\gamma)| = 1 \text{ dla wszystkich } \gamma \in \Gamma\}$.

Przypomnijmy, że $(\ell_1(\Gamma))^* = \ell_\infty(\Gamma)$. Mianowicie dla dowolnego funkcjonału $f \in (\ell_1(\Gamma))^*$ istnieje dokładnie jeden element $y = (y(\gamma))_{\gamma\in\Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma)$ taki, że

$$f(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} x(\gamma)y(\gamma)$$

dla dowolnego $x = (x(\gamma))_{\gamma\in\Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$ i $\|f\| = \|y\| = \sup_{\gamma\in\Gamma} |y(\gamma)|$. Odwzorowanie $\phi : f \mapsto y$ jest izometrycznym izomorfizmem przestrzeni $(\ell_1(\Gamma))^*$ na przestrzeń $\ell_\infty(\Gamma)$.

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą przestrzeniami Banacha. Przez ℓ^n_∞-*sumę prostą* przestrzeni $X_1, \ldots, X_n$, oznaczaną symbolem $(\sum_{i=1}^n X_i)_{\ell^n_\infty}$, rozumiemy przestrzeń Banacha wszystkich n-krotek $x = (x_1, \ldots, x_n)$ takich, że $x_i \in X_i$ dla $i = 1, \ldots, n$, wyposażoną w normę maksimum

$$\|x\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|x_i\|_{X_i}.$$

W pewnych przypadkach na oznaczenie ℓ^2_∞-sumy prostej przestrzeni X_1 i X_2, będziemy stosować zapis $X_1 \oplus X_2$. Odpowiednio przez ℓ^n_1-*sumę prostą* przestrzeni $X_1, \ldots, X_n$, oznaczaną symbolem $(\sum_{i=1}^n X_i)_{\ell^n_1}$, rozumiemy przestrzeń Banacha wszystkich n-krotek $x = (x_1, \ldots, x_n)$ takich, że $x_i \in X_i$ dla $i = 1, \ldots, n$, wyposażoną w normę

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{X_i}.$$

Jeżeli $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem przestrzeni Banacha, to przez c_0-*sumę prostą* przestrzeni $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, oznaczaną symbolem $(\sum_{i=1}^\infty X_i)_{c_0}$, rozumiemy przestrzeń Banacha wszystkich ciągów $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ takich, że $x_i \in X_i$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{i\to\infty} \|x_i\|_{X_i} = 0$, wyposażoną w normę maksimum

$$\|x\| = \max_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|_{X_i}.$$

Natomiast ℓ_1-*sumę prostą* przestrzeni $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, oznaczaną symbolem $(\sum_{i=1}^\infty X_i)_{\ell_1}$, definiujemy jako przestrzeń Banacha wszystkich ciągów $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ takich, że $x_i \in X_i$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$ oraz $(\|x_i\|_{X_i})_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, wyposażoną w normę

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_{X_i}.$$

Składam serdeczne podziękowania mojemu promotorowi dr. hab. Łukaszowi Piaseckiemu za wysiłek włożony w mój rozwój naukowy, niezliczone godziny inspirujących rozmów o matematyce, życzliwość i wyrozumiałość. Pragnę również podziękować za wsparcie udzielone podczas pisania niniejszej rozprawy, w tym niezwykle trafne komentarze i sugestie, które przyczyniły się do powstania finalnego jej kształtu.

Serdecznie dziękuję moim rodzicom i bratu za niezachwianą wiarę we mnie i wsparcie w podążaniu za marzeniami.

ROZDZIAŁ 1

Przykłady L_1-predualnych

Rzeczywistą przestrzeń Banacha X nazywamy *L_1-predualną* (lub przestrzenią *Lindenstraussa*), jeżeli $X^* = L_1(\mu)$ dla pewnej miary μ. W przypadku, gdy $X^* = \ell_1$, X nazywamy *ℓ_1-predualną*. Do najbardziej znanych ℓ_1-predualnych należą przestrzeń c wszystkich ciągów zbieżnych oraz jej podprzestrzeń c_0 wszystkich ciągów zbieżnych do zera, wyposażone w normę supremum. Kolejne przykłady ℓ_1-predualnych możemy uzyskać rozważając ℓ_∞^n-sumy proste oraz c_0-sumy proste tych przestrzeni.

W rzeczywistości wspomniane przykłady ℓ_1-predualnych są elementami szerszej klasy przestrzeni $C_0(K)$, jednych z najważniejszych i dotychczas najczęściej studiowanych w literaturze przestrzeni Lindenstraussa. Przypomnijmy, że jeśli K jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, to przez $C_0(K)$ rozumiemy przestrzeń Banacha wszystkich funkcji ciągłych $f : K \to \mathbb{R}$ *znikających w nieskończoności*, wyposażoną w normę supremum

$$\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)| \,;$$

mówimy, że funkcja $f : K \to \mathbb{R}$ znika w nieskończoności, jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ zbiór $\{x \in K : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ jest zwarty. Zauważmy, że jeżeli K jest zwartą przestrzenią Hausdorffa, to dowolna funkcja ciągła $f : K \to \mathbb{R}$ znika w nieskończoności, ponieważ dla dowolnego $\epsilon > 0$ zbiór $\{x \in K : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ jest domkniętym podzbiorem zbioru K i w konsekwencji zbiorem zwartym. Zatem, jeżeli K jest zwarty, to $C_0(K)$ jest przestrzenią wszystkich funkcji ciągłych $f : K \to \mathbb{R}$ i wobec tego w tym przypadku będziemy pisać $C(K)$ zamiast $C_0(K)$. Do klasy przestrzeni $C_0(K)$ należą wspomniane przestrzenie c i c_0, jak również przestrzeń ℓ_∞ czy $c_0(\Gamma)$, gdzie przez $c_0(\Gamma)$ rozumiemy podprzestrzeń złożoną z tych elementów $x \in \ell_\infty(\Gamma)$, dla których zbiór $\{\gamma \in \Gamma : |x(\gamma)| \geqslant \epsilon\}$ jest skończony dla dowolnego $\epsilon > 0$. Rzeczywiście, jeśli przyjmiemy, że Γ jest dowolnym zbiorem z topologią dyskretną, to przestrzeń $C_0(\Gamma)$ możemy izometrycznie utożsamiać z przestrzenią $c_0(\Gamma)$. W szczególności, dla $\Gamma = \mathbb{N}$. otrzymujemy $C_0(\mathbb{N}) = c_0(\mathbb{N}) = c_0$. Ponadto, jeżeli dla zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ z topologią dyskretną rozważymy jednopunktowe uzwarcenie Aleksandrowa $\mathbb{N}^*$ lub uzwarcenie Čecha-Stone'a $\beta\mathbb{N}$, to $C(\mathbb{N}^*)$ możemy izometrycznie utożsamiać z przestrzenią c, natomiast przestrzeń $C(\beta\mathbb{N})$ z ℓ_∞. Do ważnych przykładów przestrzeni $C_0(K)$ należą przestrzenie $C_0([1, \alpha))$ i $C([1, \alpha])$, gdzie α jest liczbą porządkową i przez $[1, \alpha)$ (odpowiednio $[1, \alpha]$) rozumiemy zbiór wszystkich liczb porządkowych λ takich, że $1 \leqslant \lambda < \alpha$ (odpowiednio $1 \leqslant \lambda \leqslant \alpha$), wyposażony w topologię porządkową. Ponadto symbolem ω oznaczamy pierwszą nieskończoną liczbę po-

rządkową. Zauważmy, że przestrzenie $C_0([1,\omega n))$, gdzie $n\in\mathbb{N}$ oraz $C_0([1,\omega^2))$ możemy izometrycznie utożsamiać odpowiednio z $\left(c_0\oplus\sum_{i=1}^{n-1}c\right)_{\ell_\infty^n}$ oraz $\left(\sum_{i=1}^{\infty}c\right)_{c_0}$. Zauważmy również, że $C([1,\omega n])=\left(\sum_{i=1}^{n}c\right)_{\ell_\infty^n}$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$. Dla kompletności rozważań warto wspomnieć, że ℓ_∞^n-sumy proste oraz c_0-sumy proste przestrzeni c_0 są izometrycznie izomorficzne z c_0.

Szerszą niż wspomniana klasa przestrzeni $C_0(K)$ jest klasa M *przestrzeni* i ogólniej G *przestrzeni*. Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha X nazywamy M przestrzenią, jeżeli może być przedstawiona w następujący sposób (patrz [36]): istnieją zwarta przestrzeń Hausdorffa K, zbiór indeksów I oraz zbiór A trójek $\{k_\alpha^1,k_\alpha^2,\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ z $k_\alpha^1,k_\alpha^2\in K$ i $\lambda_\alpha\geqslant 0$ takie, że X jest zbiorem wszystkich funkcji $f\in C(K)$ spełniających warunek $f(k_\alpha^1)=\lambda_\alpha f(k_\alpha^2)$ dla wszystkich $\alpha\in I$. Jeżeli w powyższej charakteryzacji przyjmiemy, że λ_α może być dowolną liczbą rzeczywistą, to otrzymamy definicję G przestrzeni (patrz [43]). Aby pokazać, że dowolna przestrzeń $C_0(K)$ jest M przestrzenią wystarczy rozważyć jednopunktowe uzwarcenie K^* przestrzeni K, $K^*=K\cup\{k_\infty\}$, gdzie $k_\infty\notin K$. Wtedy dla ustalonego $k_1\in K$, zbiór $\{f\in C(K^*):f(k_\infty)=0\cdot f(k_1)\}$ jest M przestrzenią izometrycznie izomorficzną z $C_0(K)$. Uzasadnienie faktu, że dowolna G przestrzeń jest L_1-predualną możemy znaleźć w [45]. Dla kompletności rozważań prowadzonych w dalszej części pracy przywołajmy jej charakteryzację.

Twierdzenie 1.0.1 (J. Lindenstrauss, D. E. Wulbert [46]). *Przestrzeń Banacha X jest G przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x,y\in X$ istnieje $u\in X$ taki, że*

$$x^*(u)=\max\{x^*(x),x^*(y),0\}+\min\{x^*(x),x^*(y),0\} \tag{1.1}$$

dla każdego $x^*\in\operatorname{ext}B_{X^*}$.

Kolejnymi rozważanymi przez nas L_1-predualnymi będą przestrzenie $A(S)$. Przez $A(S)$ oznaczamy przestrzeń Banacha wszystkich funkcji afinicznych i ciągłych na *sympleksie Choqueta* S i o wartościach rzeczywistych, wyposażoną w normę supremum. Przypomnijmy, że niepusty, zwarty, wypukły podzbiór S lokalnie wypukłej przestrzeni liniowo-topologicznej E nazywamy sympleksem Choqueta, jeżeli przy włożeniu E jako hiperpłaszczyzny $E\times\{1\}$ w przestrzeń $E\times\mathbb{R}$ stożek

$$\tilde{S}=\{\alpha x\in E\times\mathbb{R}:x\in S\subset E\times\{1\},\ \alpha\geqslant 0\}$$

generowany przez S transformuje $E\times\mathbb{R}$ w przestrzeń częściowo uporządkowaną, w taki sposób, że $\tilde{S}-\tilde{S}$ jest kratą wektorową (patrz [54, rozdział 10]). Zauważmy, że w przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych definicja sympleksu Choqueta pokrywa się z klasyczną definicją sympleksu. Fakt, że przestrzeń $A(S)^*=L_1(\mu)$ dla pewnej miary μ można znaleźć w [7].

Wracając do rozważań kluczowych dla mojej rozprawy należy zwrócić uwagę na relację jaką ma klasa przestrzeni $A(S)$ z wcześniej wspomnianą klasą przestrzeni $C(K)$. Mianowicie, jeżeli K jest zwartą przestrzenią Hausdorffa, to przestrzeń $C(K)$ jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $A(S)$, gdzie S jest słabo* zwartym, wypukłym zbiorem wszystkich miar probabilistycznych na podzbiorach borelowskich zbioru K (patrz [40]). Wobec tego klasa przestrzeni $C(K)$ zawiera się w klasie przestrzeni $A(S)$, należy jednak podkreślić, że ta druga jest od niej ściśle większa (patrz Przykład 1.0.6). Przywołamy teraz ważne i użyteczne charakteryzacje ich obu.

Twierdzenie 1.0.2 (Z. Semadeni [57]). *L_1-predualna X jest przestrzenią $A(S)$ wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{ext} B_X \neq \emptyset$.

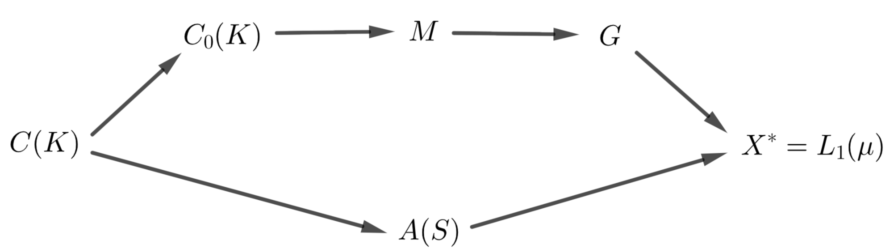
Twierdzenie 1.0.3 (J. Lindenstrauss [45]). *L_1-predualna X jest przestrzenią $C(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór* $\operatorname{ext} B_{X^*}$ *jest słabo* domknięty oraz* $\operatorname{ext} B_X \neq \emptyset$.

Warto tutaj wspomnieć, że $\operatorname{ext} B_{C(K)^*} = \{\pm\delta_k : k \in K\}$, gdzie $\delta_k(f) = f(k)$ dla dowolnego $f \in C(K)$ (patrz [4]) oraz $\operatorname{ext} B_{C(K)} = \{f \in C(K) : |f(x)| = 1$ dla wszystkich $x \in K\}$. Jeżeli X jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $C(K)$, to każdy punkt ekstremalny kuli B_{X^*} jest postaci $\pm\delta_k$ dla pewnego $k \in K$ (patrz rozdział V, §8, Lemat 6, [25]). Wobec tego z faktu, że $A(S) \subset C(S)$, wynika że każdy punkt ekstremalny kuli $B_{A(S)^*}$ jest postaci $\pm\delta_s$ dla pewnego $s \in S$. Ponadto, ponieważ funkcja stała f, równa 1 na S, należy do przestrzeni $A(S)$, więc $(\operatorname{ext} B_{A(S)^*})' \subset S_{A(S)^*}$.

Nieskończenie wymiarowe przestrzenie $A(S)$ odegrają kluczową rolę w charakteryzacji przestrzeni Banacha mających własność rozszerzania dla operatorów zwartych (patrz Twierdzenie 4.2.6).

Dla kompletności rozważań należy wspomnieć, że nie ma relacji zawierania się pomiędzy klasą M przestrzeni, czy ogólniej G przestrzeni, a klasą przestrzeni $A(S)$. Mianowicie możemy znaleźć M przestrzenie, czyli również G przestrzenie, które nie są przestrzeniami $A(S)$ (patrz Przykład 1.0.7) oraz takie przestrzenie $A(S)$, które nie są G przestrzeniami (patrz Przykład 1.0.6).

Podsumowując dotychczasowe dywagacje, relacje pomiędzy wspomnianymi klasami przestrzeni możemy zilustrować za pomocą poniższego diagramu, gdzie $X \longrightarrow Y$ oznacza, że każda przestrzeń z klasy X należy również do klasy Y. Bardziej szczegółowy diagram można znaleźć w [46] czy [43].



Rysunek 1.1: Zależności pomiędzy wybranymi klasami L_1-predualnych.

Następną klasą przestrzeni, która odegra fundamentalną rolę w mojej rozprawie doktorskiej będzie klasa $\mathcal{H}$ wszystkich ℓ_1-predualnych hiperpłaszczyzn w przestrzeni c. Dla dowolnego $e^* = (e^*(1), e^*(2), \dots) \in \ell_1$ *hiperpłaszczyznę* W_{e^*} *w* c definiujemy w następujący sposób:

$$W_{e^*} = \left\{ x = (x(1), x(2), \dots) \in c : \lim_{i \to \infty} x(i) = \sum_{i=1}^{\infty} e^*(i) x(i) \right\}.$$

Należy zaznaczyć, że powyżej przedstawiona notacja hiperpłaszczyzny w c jest niewielką modyfikacją notacji wprowadzonej wcześniej w pracy [18], w której to hiperpłaszczyznę w c

oznacza się symbolem W_f i definiuje jako jądro funkcjonału $f \in S_{c^*}$ (patrz Uwaga 1.0.5). Przyjmując, że $e = (1,1,1,\dots)$ i $e_n = (0,\dots,0,1,0,0,\dots)$, gdzie 1 występuje na n-tym miejscu, przypomnijmy, że dla każdego funkcjonału $f \in c^*$ istnieje dokładnie jeden element

$$y = (y(1), y(2), \dots) = \left(f(e) - \sum_{i=1}^{\infty} f(e_i), f(e_1), f(e_2), \dots \right) \in \ell_1$$

taki, że

$$f(x) = y(1) \lim_{i\to\infty} x(i) + \sum_{i=1}^{\infty} x(i)y(i+1)$$

dla dowolnego $x = (x(1), x(2), \dots) \in c$ i $\|f\| = \|y\| = \sum_{i=1}^{\infty} |y(i)|$.

Przywołamy teraz kluczowe informacje dotyczące hiperpłaszczyzn w przestrzeni c.

Twierdzenie 1.0.4 (E. Casini, E. Miglierna, Ł. Piasecki [18])**.**

(i) *$W_{e^*}^* = \ell_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z następujących warunków:*

  (a) *$e^* \in B_{\ell_1}$,*

  (b) *$\|e^*\| > 1$ i $|e^*(i)| \geqslant \frac{1}{2}(1 + \|e^*\|)$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$ (hiperpłaszczyzna spełniająca ten warunek jest izometryczna z przestrzenią c).*

(ii) *Niech $e^* \in B_{\ell_1}$. Wtedy*

  (a) *$W_{e^*} = c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|e^*(i)| = 1$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$.*

  (b) *$W_{e^*} = c_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e^* = (0,0,0,\dots)$.*

(iii) *Dla dowolnego $e^* \in B_{\ell_1}$ mamy $W_{e^*}^* = \ell_1$, gdzie izometryczny izomorfizm $\phi : \ell_1 \to W_{e^*}^*$ jest określony wzorem*

$$(\phi(y))(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)y(i)$$

dla każdego $y = (y(1), y(2), \dots) \in \ell_1$ i każdego $x = (x(1), x(2), \dots) \in W_{e^*}$. Ponadto

$$e_n^* \xrightarrow{\sigma(\ell_1, W_{e^*})} e^*,$$

gdzie $\sigma(X^*, X)$ oznacza słabą* topologię na X^* indukowaną przez X.

(iv) *Jeżeli X jest ℓ_1-predualną taką, że standardowa baza (e_n^*) w ℓ_1 jest $\sigma(\ell_1, X)$-zbieżna do e^*, to $X = W_{e^*}$.*

Uwaga 1.0.5. Zauważmy, że

$$W_{e^*} = W_f = \ker f = \left\{ x \in c : f(1) \lim_{i\to\infty} x(i) + \sum_{i=1}^{\infty} f(i+1)x(i) = 0 \right\},$$

gdzie

$$f = \left(\frac{1}{1+\|e^*\|}, -\frac{e^*(1)}{1+\|e^*\|}, -\frac{e^*(2)}{1+\|e^*\|}, \dots, -\frac{e^*(i)}{1+\|e^*\|}, \dots \right) \in S_{c^*}.$$

Wobec tego przyjęta notacja W_{e^*} dla hiperpłaszczyzny w c nie uwzględnia przypadku, gdy $f(1) = 0$. Jednakże, mając na uwadze, że

$$W_f^* = \ell_1 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } |f(i)| \geqslant \frac{1}{2} \text{ dla pewnego } i \in \mathbb{N}$$

oraz fakt, że

$$W_f = c \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } |f(i)| \geqslant \frac{1}{2} \text{ dla pewnego } i \geqslant 2$$

(patrz [18, Twierdzenie 1.2]), z dokładnością do izometrii możemy przyjąć, że

$$\mathcal{H} = \{W_{e^*} : e^* \in B_{\ell_1}\}.$$

Klasa $\mathcal{H}$ jest niezwykle bogata i różnorodna. Możemy w niej odnaleźć przykłady przestrzeni, które należą do wspomnianych klas $A(S)$, $C(K)$, G czy M przestrzeni, a także takie, które nie należą do żadnej z nich (ani żadnej z pozostałych klas L_1-predualnych omawianych w pracy [46]). Uwagi te zilustrujemy teraz odpowiednimi przykładami.

Przykład 1.0.6. Rozważmy przestrzeń W_{e^*}, gdzie $e^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots\right) \in S_{\ell_1}$. Zauważmy, że $(1, 1, 1, \dots) \in \operatorname{ext} B_{W_{e^*}}$, ponieważ $(1, 1, 1, \dots) \in \operatorname{ext} B_c$. Zatem z Twierdzenia 1.0.2, W_{e^*} jest przestrzenią $A(S)$ dla pewnego sympleksu Choqueta S. Łatwo zauważyć, że w tym przypadku mamy

$$S = \left\{(y(1), y(2), \dots) \in \ell_1 : \sum_{i=1}^{\infty} y(i) = 1,\ y(i) \geqslant 0,\ i = 1, 2, \dots\right\}.$$

Z drugiej strony, z punktu (iii) Twierdzenia 1.0.4 mamy $(\operatorname{ext} B_{W_{e^*}^*})' = \{\pm e^*\} \not\subset \operatorname{ext} B_{W_{e^*}^*}$. Z Twierdzenia 1.0.3 otrzymujemy, że W_{e^*} nie jest przestrzenią $C(K)$.

Wykażemy teraz, że W_{e^*} nie jest G przestrzenią. Rozważmy $x, y \in W_{e^*}$ postaci $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)$ i $y = \left(1, -\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)$. Gdyby dla x i y istniał $u = (u(1), u(2), \dots) \in W_{e^*}$ taki, że równość (1.1) byłaby spełniona dla każdego $e_n^* \in \operatorname{ext} B_{W_{e^*}^*}$, to

$$u(n) = \max\{x(n), y(n), 0\} + \min\{x(n), y(n), 0\}$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $u = \left(1, -\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)$, ale $u \notin W_{e^*}$, sprzeczność. Z Twierdzenia 1.0.1, W_{e^*} nie jest G przestrzenią.

Warto tutaj wspomnieć, że W_{e^*} jest elementem ważnej podklasy ℓ_1-predualnych hiperpłaszczyzn w c odgrywającej kluczową rolę w charakteryzacji przestrzeni Banacha mających własność rozszerzania dla operatorów zwartych (patrz Twierdzenie 4.2.6). Do podklasy tej należą ℓ_1-predualne hiperpłaszczyzny w c zawierające element $(1, 1, 1, \dots) \in c$, tzn. takie przestrzenie W_{x^*}, że $x^* \in S_{\ell_1}$ i $\sum_{i=1}^{\infty} x^*(i) = 1$ oraz wszystkie inne z nimi izometryczne (patrz Stwierdzenie 2.2.2).

Przykład 1.0.7. Rozważmy hiperpłaszczyznę W_{e^*} z $e^* = (r, 0, 0, \dots)$ i $0 < r < 1$. Zauważmy, że $\operatorname{ext} B_{W_{e^*}} = \emptyset$. Rzeczywiście, dla dowolnego $x \in S_{W_{e^*}}$ mamy $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, gdzie

$$y = \left(x(1), x(2) + \frac{1 - |x(2)|}{2}, x(3) + \frac{1 - |x(3)|}{3}, x(4) + \frac{1 - |x(4)|}{4}, \dots\right) \in B_{W_{e^*}},$$

$$z = \left(x(1), x(2) - \frac{1-|x(2)|}{2}, x(3) - \frac{1-|x(3)|}{3}, x(4) - \frac{1-|x(4)|}{4}, \dots\right) \in B_{W_{e^*}}$$

i $y(i) \neq z(i)$ dla każdego $i \in \{2, 3, \dots\}$ takiego, że $|x(i)| \neq 1$. Wobec tego W_{e^*} nie jest przestrzenią $A(S)$ i w konsekwencji nie jest przestrzenią $C(K)$. Zauważmy również, że z punktu (iii) Twierdzenia 1.0.4 mamy $(\operatorname{ext} B_{W^*_{e^*}})' = \{\pm e^*\} \not\subset \operatorname{ext} B_{W^*_{e^*}}$ (por. Twierdzenie 1.0.3).

Z drugiej strony łatwo wywnioskować, że tak określona W_{e^*} jest M przestrzenią. Mianowicie wystarczy zauważyć, że $W_{e^*} = \{x \in C([1, \omega]) : x(\omega) = rx(1)\}$. Dodajmy również, że żadna z tych przestrzeni nie jest przestrzenią $C_0(K)$ (patrz np. [44, Stwierdzenie 4.6]).

Należy podkreślić, że w dalszej części pracy wyznaczymy dokładne wartości odległości Banacha-Mazura pomiędzy dowolnymi hiperpłaszczyznami powyższej postaci (patrz Przykład 3.1.9, Przykład 3.2.4, Uwaga 3.2.6).

Przykład 1.0.8. Rozważmy przestrzeń W_{e^*}, gdzie $e^* = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, -\frac{1}{2^4}, \dots\right) \in S_{\ell_1}$. Pokażemy, że $\operatorname{ext} B_{W_{e^*}} = \emptyset$. Weźmy dowolny $x \in S_{W_{e^*}}$. Niech

$$y = \left(x(1) + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \frac{1-|x(i)|}{2^{2i-2}}, x(2) + \frac{1-|x(2)|}{2}, x(3) + \frac{1-|x(3)|}{2^2}, x(4) + \frac{1-|x(4)|}{2^3}, \dots\right)$$

oraz

$$z = \left(x(1) - \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \frac{1-|x(i)|}{2^{2i-2}}, x(2) - \frac{1-|x(2)|}{2}, x(3) - \frac{1-|x(3)|}{2^2}, x(4) - \frac{1-|x(4)|}{2^3}, \dots\right).$$

Wtedy $y, z \in B_{W_{e^*}}$ i $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. Zauważmy, że $y(i) \neq z(i)$ dla każdego $i \in \{2, 3, \dots\}$ takiego, że $|x(i)| \neq 1$, a ponieważ W_{e^*} nie zawiera elementu $x \in S_{W_{e^*}}$ takiego, że $\lim_{i\to\infty} x(i) = \pm 1$, więc $y \neq z$. Wobec tego $\operatorname{ext} B_{W_{e^*}} = \emptyset$ i w konsekwencji W_{e^*} nie może być przestrzenią $A(S)$, a zatem również przestrzenią $C(K)$. Zauważmy, że z punktu (iii) Twierdzenia 1.0.4 mamy $(\operatorname{ext} B_{W^*_{e^*}})' = \{\pm e^*\} \not\subset \operatorname{ext} B_{W^*_{e^*}}$ (por. Twierdzenie 1.0.3).

Pokażemy teraz, że W_{e^*} nie jest G przestrzenią. Rozważmy $x, y \in W_{e^*}$ takie, że $x = \left(\frac{7}{3}, 1, 1, 1, \dots\right)$ oraz $y = \left(1, -\frac{1}{12}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)$. Załóżmy, że dla x i y istnieje taki $u = (u(1), u(2), \dots) \in W_{e^*}$, że równość (1.1) jest spełniona dla każdego $e_n^* \in \operatorname{ext} B_{W^*_{e^*}}$. Wtedy

$$u(n) = \max\{x(n), y(n), 0\} + \min\{x(n), y(n), 0\}$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i w konsekwencji $u = \left(\frac{7}{3}, \frac{11}{12}, 1, 1, 1, \dots\right)$, ale $u \notin W_{e^*}$, sprzeczność z założeniem. Z Twierdzenia 1.0.1, W_{e^*} nie jest G przestrzenią.

W rzeczywistości można pokazać, że powyższa hiperpłaszczyzna nie należy do żadnej z klas L_1-predualnych omawianych w [46].

Oprócz wspomnianej klasy ℓ_1-predualnych hiperpłaszczyzn w c obiektem naszego zainteresowania są również, odpowiednio, ℓ_∞^n-sumy proste oraz c_0-sumy proste tych przestrzeni. Przyjmijmy teraz następujące oznaczenia. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} W_{x_i^*} \right)_{\ell_\infty^n} : x_i^* \in B_{\ell_1},\ i = 1, \dots, n \right\}.$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy $n = 1$, zbiór $\mathcal{F}_1$ pokrywa się ze zbiorem $\mathcal{H}$. Następnie, niech

$$\mathcal{F}_\infty = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{\infty} W_{x_i^*} \right)_{c_0} : x_i^* \in B_{\ell_1},\ i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ponadto przyjmijmy, że

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n.$$

Łatwo sprawdzić, że wszystkie przestrzenie należące do klasy $\mathcal{F}$ są ℓ_1-predualnymi.

Warto zauważyć, że chcąc otrzymać kolejne przykłady L_1-predualnych, nie musimy ograniczać się do ℓ_∞^n-sum prostych oraz c_0-sum prostych ℓ_1-predualnych hiperpłaszczyzn w c. Możemy konstruować odpowiednie sumy proste ze wszystkich wspomnianych do tej pory L_1-predualnych, np. $A(S) \oplus M$.

W naszych rozważaniach istotną rolę odegra również inna klasyfikacja L_1-predualnych X oparta na usytuowaniu słabych* punktów skupienia zbioru $\operatorname{ext} B_{X^*}$ (patrz [28]). Mianowicie będziemy rozważać L_1-predualne X, dla których $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$. Oczywiście $\left(\operatorname{ext} B_{(c_0(\Gamma))^*}\right)' = \{0\}$, więc $c_0(\Gamma)$ (i w konsekwencji c_0) należy do wspomnianej klasy przestrzeni dla $r = 0$. Z punktu (iii) Twierdzenia 1.0.4, dla dowolnej hiperpłaszczyzny $W_{e^*} \in \mathcal{H}$ mamy $\left(\operatorname{ext} B_{W_{e^*}^*}\right)' = \pm e^*$. Wobec tego W_{e^*} należy do rozważanej klasy przestrzeni wtedy i tylko wtedy, gdy $\|e^*\| < 1$. Następnie zauważmy, że jeżeli $X \in \mathcal{F}_n$ dla pewnego $n \in \{2, 3, \dots\}$, to $X^* = (\sum_{i=1}^n \ell_1)_{\ell_1^n} = \ell_1$ oraz

$$(\operatorname{ext} B_{X^*})' = \bigcup_{i=1}^{n} \{\pm(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, x_i^*, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i})\}.$$

Natomiast, jeżeli $X \in \mathcal{F}_\infty$, to $X^* = (\sum_{i=1}^\infty \ell_1)_{\ell_1} = \ell_1$ oraz

$$(\operatorname{ext} B_{X^*})' = \{(0, 0, \dots)\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\pm(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, x_i^*, 0, 0, \dots)\}.$$

Wobec tego $\left(\sum_{i=1}^n W_{x_i^*}\right)_{\ell_\infty^n}$ należy do rozważanej klasy przestrzeni wtedy i tylko wtedy, gdy $\|x_i^*\| < 1$ dla każdego $i = 1, \dots, n$. Podobnie $\left(\sum_{i=1}^\infty W_{x_i^*}\right)_{c_0}$ należy do rozważanej klasy przestrzeni wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|x_i^*\| < 1$.

Na zakończenie warto wspomnieć, że istnieje charakteryzacja przestrzeni Banacha będących L_1-predualnymi podana przez E. Michaela i A. Pełczyńskiego [50] oraz A. J. Lazara i J. Lindenstraussa [42].

ROZDZIAŁ 2

Odległość Banacha-Mazura

Przypomnijmy, że dla dowolnych przestrzeni Banacha X i Y operator liniowy $T : X \to Y$ nazywamy *izomorficznym włożeniem*, jeżeli istnieją $a, b > 0$ takie, że dla dowolnego $x \in X$

$$a \|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant b \|x\| .$$

Dystorsją włożenia izomorficznego $T : X \to Y$ nazywamy liczbę $\|T\| \|T^{-1}\|$, gdzie T^{-1} oznacza operator odwrotny do izomorfizmu T z X na jego obraz $T(X)$. Dla dowolnych izomorficznych przestrzeni Banacha X i Y przez $d(X,Y)$ oznaczamy *odległość Banacha-Mazura* pomiędzy nimi, zdefiniowaną jako

$$d(X,Y) = \inf \left\{ \ln \left(\|T\| \|T^{-1}\| \right) : T \text{ jest izomorfizmem z } X \text{ na } Y \right\}.$$

W przypadku, gdy $d(X,Y) = 0$, przestrzenie X i Y nazywamy *prawie izometrycznymi* (lub *niemal izometrycznymi*). Zarówno pojęcie odległości Banacha-Mazura, jak i przestrzeni prawie izometrycznych ukazało się po raz pierwszy w słynnej monografii [6] autorstwa Stefana Banacha.

Warto wspomnieć, że współcześnie najczęściej stosuje się definicję odległości Banacha-Mazura z pominięciem logarytmu, jednakże dla celów rozprawy pozostaniemy przy jej pierwotnej wersji.

2.1 Przegląd znanych oszacowań odległości Banacha-Mazura w klasie $C_0(K)$

W tym rozdziale dokonamy przeglądu znanych wyników dotyczących oszacowań dystorsji izomorficznych włożeń i odległości Banacha-Mazura pomiędzy wybranymi przestrzeniami $C_0(K)$.

Do niewątpliwie kluczowych wyników w izometrycznej teorii przestrzeni Banacha należy twierdzenie Banacha-Stone'a.

Twierdzenie 2.1.1 (S. Banach [6], M. H. Stone [59]). *Załóżmy, że K i L są zwartymi przestrzeniami Hausdorffa. Przestrzenie $C(K)$ i $C(L)$ są izometrycznie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy K i L są homeomorficzne. Ponadto każdy izometryczny izomorfizm $T : C(L) \to C(K)$ jest postaci*

$$T(f)(x) = a(x) \cdot f(h(x)), \; x \in K,$$

gdzie $h : K \to L$ jest homeomorfizmem i a jest taką funkcją z przestrzeni $C(K)$, że $|a(x)| = 1$ dla każdego $x \in K$.

Wynik ten przy dodatkowym założeniu, że K i L są przestrzeniami metrycznymi pojawił się po raz pierwszy w 1932 roku w słynnej monografii S. Banacha [6]. Następnie w 1937 roku M. H. Stone wykazał to twierdzenie w takiej formie w jakiej jest znane dzisiaj, tzn. dla przestrzeni $C(K)$, gdzie K jest zwartą przestrzenią Hausdorffa [59]. Warto wspomnieć, że prawdziwa jest analogiczna wersja tego twierdzenia dla przestrzeni $C_0(K)$ (patrz np. rozdział VII w [8]).

Twierdzenie Banacha-Stone'a doczekało się kilku uogólnień. Na uwagę zasługuje wynik uzyskany przez D. Amira.

Twierdzenie 2.1.2 (D. Amir [3])**.** *Niech K i L będą zwartymi przestrzeniami Hausdorffa. Jeżeli istnieje izomorfizm T z $C(K)$ na $C(L)$ taki, że $\|T\| \, \|T^{-1}\| < 2$, to K i L są homeomorficzne.*

Analogiczny wynik w przypadku, gdy K i L są lokalnie zwarte, został uzyskany przez M. Camberna.

Twierdzenie 2.1.3 (M. Cambern [12])**.** *Niech K i L będą lokalnie zwartymi przestrzeniami Hausdorffa. Jeżeli istnieje izomorfizm T z $C_0(K)$ na $C_0(L)$ taki, że $\|T\| \, \|T^{-1}\| < 2$, to K i L są homeomorficzne.*

Ponadto M. Cambern [15] podał przykład przestrzeni K i L takich, że K jest zwarta, L lokalnie zwarta, ale niezwarta oraz skonstruował izomorfizm T z $C_0(L)$ na $C(K)$ taki, że $\|T\|\|T^{-1}\| = 2$. Następnie H. B. Cohen [24] wykazał, że oszacowanie podane w Twierdzeniu 2.1.2 również jest dokładne.

S. Mazurkiewicz i W. Sierpiński [47] (patrz również [58, Twierdzenie 8.6.10]) wykazali, że każda zwarta przeliczalna przestrzeń metryczna jest homeomorficzna z przedziałem $[1, \alpha]$ dla pewnej przeliczalnej liczby porządkowej α przy założeniu, że w $[1, \alpha]$ rozważamy topologię porządkową. Korzystając z tego wyniku C. Bessaga i A. Pełczyński [9] podali izomorficzną klasyfikację przestrzeni $C(K)$, gdy K jest zwartą, przeliczalną przestrzenią metryczną. Wykazali, że w przypadku, gdy $\omega \leqslant \alpha \leqslant \beta < \omega_1$, przestrzeń $C([1, \alpha])$ jest izomorficzna z przestrzenią $C([1, \beta])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta < \alpha^\omega$, gdzie ω oznacza pierwszą nieskończoną liczbę porządkową, natomiast ω_1 pierwszą nieprzeliczalną liczbę porządkową. Wobec tego możemy podać nieskończenie wiele par nieizomorficznych przestrzeni $C(K)$ i $C(L)$ takich, że K i L są przeliczalne. Na przykład przestrzenie $c = C([1, \omega])$, $C([1, \omega^\omega])$, $C([1, \omega^{\omega^2}])$, $C([1, \omega^{\omega^3}])$,...,$C([1, \omega^{\omega^\omega}])$,... są wzajemnie nieizomorficzne.

W przypadku nieprzeliczalnych, zwartych przestrzeni metrycznych K i L, głównym wynikiem mówiącym o istnieniu izomorfizmu pomiędzy przestrzeniami $C(K)$ i $C(L)$ jest twierdzenie Miljutina [51] (por. [58, Twierdzenie 21.5.10]). Głosi ono, że jeżeli K i L są nieprzeliczalnymi, zwartymi przestrzeniami metrycznymi, to przestrzeń $C(K)$ jest izomorficzna z $C(L)$.

We wspomnianej wcześniej monografii [6], Banach postawił pytanie czy przestrzenie c i c_0 są prawie izometryczne. Oczywiście nie są one izometryczne, świadczy o tym chociażby fakt, że domknięta kula jednostkowa w c ma punkty ekstremalne w przeciwieństwie do domkniętej kuli jednostkowej w przestrzeni c_0. Z wyniku R. D. McWilliamsa [48] otrzymujemy, że

$d(c, c_0) \geqslant \ln \frac{3}{2}$ i stąd odpowiedź na pytanie Banacha okazała się negatywna. Kolejne oszacowanie $d(c, c_0) \geqslant \ln 2$ znaleźli niezależnie M. Cambern [11] oraz V. I. Gurariĭ [33]. Z uwagi zamieszczonej w pracy [11] wynika natomiast, że oszacowanie $d(c, c_0) \geqslant \ln 2$ zostało wcześniej wykazane przez A. Pełczyńskiego, który nie opublikował swojego wyniku. Dokładna wartość odległości Banacha-Mazura pomiędzy przestrzeniami c i c_0 została podana dopiero w 1968 roku przez M. Camberna [13].

Twierdzenie 2.1.4 (M. Cambern [13])**.**

$$d(c_0, c) = \ln 3.$$

Uwaga 2.1.5. W pracy [11] M. Cambern zaobserwował, że szacując odległość Banacha-Mazura możemy ograniczyć nasze rozważania do badania operatorów *zwiększających normę.* Istotnie, jeżeli $T : X \to Y$ jest włożeniem izomorficznym takim, że $\|T^{-1}\| = 1$, to $\|T(x)\| \geqslant \|x\|$ dla każdego $x \in X$. W przeciwnym wypadku T możemy zastąpić przez $S = \|T^{-1}\| \, T$. Tak określony operator S jest włożeniem izomorficznym przestrzeni X w przestrzeń Y z $\|S^{-1}\| = 1$. Wobec tego S zwiększa normę, a jego dystorsja jest równa dystorsji operatora T.

Uwaga 2.1.6. Dowód Twierdzenia 2.1.4 opiera się w głównej mierze na dwóch krokach dowodowych. Pierwszym z nich jest ograniczenie rozważań do operatorów zwiększających normę (patrz Uwaga 2.1.5), a drugim konstrukcja takiego podciągu elementów bazowych z zadanej przestrzeni, by ich obrazy poprzez ograniczony operator liniowy tworzyły ciąg o prawie rozłącznych nośnikach (patrz Uwaga 3.1.4). Warto wspomnieć, że te pierwiastki dowodowe były później wielokrotnie wykorzystywane we wszystkich ważnych pracach dotyczących oszacowań odległości Banacha-Mazura w klasie przestrzeni $C_0(K)$, gdzie K jest zbiorem przeliczalnym. Dowód wieńczy konstrukcja izomorfizmu $T : c \to c_0$ określonego dla dowolnego $x = (x(1), x(2), \dots) \in c$ wzorem

$$T(x) = (2x(0), x(1) - x(0), x(2) - x(0), \dots),$$

gdzie $x(0) = \lim_{i\to\infty} x(i)$.

M. Cambern wykazał również następujące uogólnienie Twierdzenia 2.1.4.

Twierdzenie 2.1.7 (M. Cambern [14])**.** *Niech Γ będzie nieskończonym zbiorem z topologią dyskretną.*

1. *Jeżeli K jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, która zawiera punkt skupienia i jeżeli T jest dowolnym ciągłym izomorfizmem z przestrzeni $C_0(K)$ na $C_0(\Gamma)$, to* $\|T\| \, \|T^{-1}\| \geqslant 3$.

2. *Jeżeli Γ^* oznacza jednopunktowe uzwarcenie zbioru Γ, to istnieje izomorfizm T z $C(\Gamma^*)$ na $C_0(\Gamma)$ taki, że $\|T\| \, \|T^{-1}\| = 3$.*

Wprowadźmy teraz następujące oznaczenia. Dla dowolnej liczby porządkowej α, *pochodną rzędu* α zbioru K, oznaczaną przez $K^{(\alpha)}$, definiujemy przez indukcję pozaskończoną w następujący sposób: $K^{(0)} = K$, $K^{(1)}$ jest zbiorem wszystkich punktów skupienia zbioru K i

$$K^{(\alpha)} = \begin{cases} (K^{(\beta)})^{(1)}, & \text{jeżeli } \alpha = \beta + 1, \\ \bigcap_{\beta<\alpha} K^{(\beta)}, & \text{jeżeli } \alpha \text{ jest graniczną liczbą porządkową.} \end{cases}$$

Ponadto symbolem $|K|$ będziemy oznaczać moc zbioru K.

Możemy teraz przytoczyć wynik Y. Gordona.

Twierdzenie 2.1.8 (Y. Gordon [31])**.** *Niech K i L będą lokalnie zwartymi przestrzeniami Hausdorffa i niech T będzie izomorficznym włożeniem z przestrzeni $C_0(K)$ w $C_0(L)$. Jeżeli istnieje taka liczba porządkowa α, że $\left|K^{(\alpha)}\right| > \left|L^{(\alpha)}\right|$, to $\|T\|\,\|T^{-1}\| \geqslant 3$.*

Dowód Twierdzenia 2.1.8 opiera się głównie na dwóch metodach dowodowych. Pierwsza z nich, pochodząca od Camberna, polega na zawężeniu rozważań do operatorów zwiększających normę oraz konstrukcji ciągu o prawie rozłącznych nośnikach (patrz Uwaga 2.1.6). Druga, będąca nową w kontekście tej teorii techniką, mówiąc w pewnym uproszczeniu, opiera się na konstrukcji operatora liniowego pomiędzy pewnymi, odpowiednio dobranymi skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni $C_0(K)$ i $C_0(L)$. Konstrukcja tych przestrzeni jest ściśle związana z założeniem, że $\left|K^{(\alpha)}\right| > \left|L^{(\alpha)}\right|$ dla pewnej liczby porządkowej α. W konsekwencji, przy dodatkowym założeniu, że $\|T\|\,\|T^{-1}\| < 3$, uzyskujemy operator będący włożeniem izomorficznym z przestrzeni n-wymiarowej w przestrzeń m-wymiarową, gdzie $\left|K^{(\alpha)}\right| \geqslant n > m = \left|L^{(\alpha)}\right|$, co daje sprzeczność w dowodzie nie wprost.

Stosując Twierdzenie 2.1.8 oraz wspomniany wcześniej wynik Mazurkiewicza i Sierpińskiego [47], Y. Gordon otrzymał następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1.9 (Y. Gordon [31])**.** *Jeżeli K i L są zwartymi, przeliczalnymi przestrzeniami metrycznymi takimi, że L nie zawiera podzbioru homeomorficznego z K, to dla dowolnego izomorfizmu z przestrzeni $C(K)$ na $C(L)$ mamy $\|T\|\,\|T^{-1}\| \geqslant 3$.*

Kontynuując nasze rozważania dotyczące odległości Banacha-Mazura w klasie przestrzeni $C_0(K)$, musimy wspomnieć o fakcie, że problem wyznaczenia $d(c_0, C(K))$ został całkowicie rozwiązany. Mianowicie ze wspomnianych wcześniej wyników Bessagi i Pełczyńskiego [9] oraz Mazurkiewicza i Sierpińskiego [47], przestrzeń c_0 jest izomorficzna z przestrzenią $C(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy K jest homeomorficzny z $[1, \omega^n k]$ dla pewnego $1 \leqslant n, k < \omega$. Dokładną wartość odległości $d(c_0, C([1, \omega^n k]))$ podali L. Candido i E. M. Galego.

Twierdzenie 2.1.10 (L. Candido, E. M. Galego [16])**.** *Załóżmy, że $1 \leqslant n, k < \omega$. Wtedy dla dowolnego włożenia izomorficznego T z $C([1, \omega^n k])$ w c_0 mamy $\|T\|\,\|T^{-1}\| \geqslant 2n+1$. Ponadto $d(c_0, C([1, \omega^n k])) = \ln(2n+1)$.*

Tak jak przypadku kilku wcześniej wspomnianych wyników, również i w dowodzie powyższego twierdzenia, autorzy przy szacowaniu odległości Banacha-Mazura ograniczają swoje rozważania do operatorów zwiększających normę (patrz Uwaga 2.1.5). Ich dowód opiera się w głównej mierze na n-krotnym naśladowaniu metody konstrukcji ciągu o prawie rozłącznych nośnikach z dowodu Camberna, a podana przez autorów twierdzenia konstrukcja izomorfizmu jest naturalnym uogólnieniem jego izomorfizmu (patrz Uwaga 2.1.6).

Wyżej wspomniane wyniki Camberna, Gordona, Candido i Galego zostały w rzeczywistości zainspirowane wcześniejszą pracą [9]. Mianowicie w [9] C. Bessaga i A. Pełczyński zainicjowali badania dotyczące odległości Banacha-Mazura pomiędzy izomorficznymi przestrzeniami $C([1, \alpha])$, gdzie $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$. Otóż wykazali oni, że jeżeli istnieje $1 \leqslant n < \omega$ takie, że $\omega \leqslant \alpha \leqslant \alpha^n \leqslant \beta < \alpha^{n+1} < \omega_1$, to $\ln n \leqslant d(C([1, \alpha]), C([1, \beta])) \leqslant \ln 4^{n+3}$. Dokładniejsze oszacowania odległości $d(c, C([1, \omega^n k]))$ podali L. Candido i E. M. Galego.

Twierdzenie 2.1.11 (L. Candido, E. M. Galego [17]). *Załóżmy, że* $1 < n, k < \omega$. *Wtedy*

- $\ln 3 \leqslant d(c, C([1,\omega k])) \leqslant \ln\left(2+\sqrt{5}\right)$,
- $\ln(2n-1) \leqslant d(c, C([1,\omega^n])) \leqslant \ln\left(n+\sqrt{(n-1)(n+3)}\right)$,
- $\ln(2n+1) \leqslant d(c, C([1,\omega^n k])) \leqslant \ln\left(n+1+\sqrt{n(n+4)}\right)$.

Dowód oszacowań od dołu w powyższym twierdzeniu sprowadza się do wspomnianych już wcześniej metod, a mianowicie ograniczenia rozważań do operatorów zwiększających normę (patrz Uwaga 2.1.5), n-krotnym naśladowaniu metody konstrukcji ciągu o prawie rozłącznych nośnikach z dowodu Camberna (patrz Uwaga 2.1.6) oraz użytej w dowodzie Twierdzenia 2.1.8 konstrukcji operatora liniowego pomiędzy pewnymi skończenie wymiarowymi przestrzeniami. W dowodzie Twierdzenia 2.1.11 na uwagę zasługuje szereg nowych i ciekawych izomorfizmów, które pozwoliły autorom uzyskać dosyć ciasne oszacowania. Warto wspomnieć, że dokładną wartość odległości Banacha-Mazura znamy jedynie w przypadku przestrzeni c i $C([1,\omega 2])$. Oczywiście oszacowanie $d(c, C([1,\omega k])) \geqslant \ln 3$ dla $1 < k < \omega$ wynika z pracy Gordona (Twierdzenie 2.1.8). Do niego należy również konstrukcja odpowiedniego izomorfizmu z przestrzeni $C([1,\omega 2])$ na przestrzeń c, który pokazuje, że w tym przypadku oszacowanie to jest dokładne [31]. Autorzy Twierdzenia 2.1.11, nie znając dokładnej wartości $d(c, C([1,\omega k]))$ dla $2 < k < \omega$, wysnuli przypuszczenie, że może być równa 3, 4 lub $2+\sqrt{5}$. Pokażemy, że w przypadku, gdy $k = 3$, można odrzucić dwie ostatnie liczby.

Przykład 2.1.12 (A. Gergont, wynik nieopublikowany). Rozważmy odwzorowanie $T : C([1,\omega 3]) \to C([1,\omega])$ określone dla dowolnej funkcji $f \in C([1,\omega 3])$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
T(f)(1) &= -0,5f(\omega) - 0,95f(\omega 2) - 0,5f(\omega 3),\\
T(f)(2) &= -f(\omega) + f(\omega 3),\\
T(f)(\omega) &= -0,3f(\omega) + 0,25f(\omega 2) - 0,3f(\omega 3),\\
T(f)(3m) &= -0,86f(m) + 0,56f(\omega) + 0,25f(\omega 2) - 0,3f(\omega 3),\\
T(f)(3m+1) &= 0,83f(\omega+m) - 0,3f(\omega) - 0,58f(\omega 2) - 0,3f(\omega 3),\\
T(f)(3m+2) &= -0,86f(\omega 2+m) - 0,3f(\omega) + 0,25f(\omega 2) + 0,56f(\omega 3).
\end{aligned}$$

T jest izomorfizmem o normie $\|T\| = 2,01$. Z drugiej strony dla dowolnej funkcji $f \in C([1,\omega])$,

$$\begin{aligned}
T^{-1}(f)(\omega) &= -0,304878f(1) - 0,5f(2) - 1,15853589f(\omega),\\
T^{-1}(f)(\omega 2) &= -0,731707f(1) + 2,22\cdot 10^{-16}f(2) + 1,2195129f(\omega),\\
T^{-1}(f)(\omega 3) &= -0,304878f(1) + 0,5f(2) - 1,15853589f(\omega),\\
T^{-1}(f)(m) &= -0,304878f(1) - 0,5f(2) + 0,00425411f(\omega) - 1,16279f(3m),\\
T^{-1}(f)(\omega+m) &= -0,731707f(1) + 2,22\cdot 10^{-16}f(2) + 0,0146929f(\omega) + 1,20482f(3m+1),\\
T^{-1}(f)(\omega 2+m) &= -0,304878f(1) + 0,5f(2) + 0,00425411f(\omega) - 1,16279f(3m+2)
\end{aligned}$$

oraz $\|T^{-1}\| = 1,97192$. Stąd $\|T\|\|T^{-1}\| = 3,9635592$. Wobec tego, utożsamiając izometrycznie przestrzeń c z przestrzenią $C([1,\omega])$, otrzymujemy $d(c, C([1,\omega 3])) \leqslant 3,9635592$. Powyższy wynik otrzymano za pomocą eksperymentu komputerowego.

2.2 Prawie izometryczne ℓ_1-predualne

Zauważmy, że przy przyjętej definicji odległości Banacha-Mazura, dla izomorficznych przestrzeni Banacha X, Y i Z mamy

- $d(X,Y) \geqslant 0$,
- $d(X,Y) = d(Y,X)$,
- $d(X,Y) \leqslant d(X,Z) + d(Z,Y)$.

Ponadto oczywiste jest, że odległość Banacha-Mazura pomiędzy izometrycznymi przestrzeniami Banacha jest równa 0. Obserwacja ta rodzi pytanie, czy z faktu, że $d(X,Y) = 0$, wynika, że X i Y są izometryczne i wobec tego odległość Banacha-Mazura spełnia wszystkie warunki definicji metryki. W przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Natomiast w przypadku nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha znane są przykłady przestrzeni prawie izometrycznych, które nie są izometryczne. Pierwszy z nich podali C. Bessaga oraz A. Pełczyński [53]. Ostatnio Ł. Piasecki [56] wykazał, że przykłady przestrzeni prawie izometrycznych, które nie są izometryczne możemy odnaleźć również w klasie $\mathcal{H}$ (patrz Przykład 4.1.6). Wobec tego $(\mathcal{H}, d)$ nie jest przestrzenią metryczną. Co więcej, we wspomnianej pracy [56], dla dowolnej ℓ_1-predualnej hiperpłaszczyzny W_{e^*} autor podał jawne modele wszystkich przestrzeni Banacha, które są z nią prawie izometryczne. Ponieważ wyniki te są kluczowe dla rozważań przedstawionych w rozprawie, przytoczymy je w dalszej części podrozdziału.

Na początku wprowadźmy niezbędne oznaczenia. Symbolem Π będziemy oznaczać zbiór wszystkich permutacji $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, natomiast przez $\mathcal{E}$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich ciągów znaków $\epsilon = (\epsilon(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $\epsilon(n) = \pm 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy $x = (x(1), x(2), \dots) \in \ell_1$. Dla $\epsilon \in \mathcal{E}$ i $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ niech

$$x_{i,\epsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon(n) x(n) e^*_{n+i},$$

natomiast w przypadku, gdy $i = \infty$, niech

$$x_{\infty,\epsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon(n) x(n) e^*_{2n-1}.$$

Następnie dla $\epsilon \in \mathcal{E}$, $\pi \in \Pi$ i $i \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ połóżmy

$$x_{i,\epsilon,\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{i,\epsilon}(n) e^*_{\pi(n)}.$$

W dalszej kolejności, dla zadanego $x = (x(1), x(2), \dots) \in \ell_1$ zdefiniujmy ciąg $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ w następujący sposób:

$$n_1 = \min\left\{ n \in \mathbb{N} : |x(n)| = \max_{i\in\mathbb{N}} |x(i)| \right\}$$

i dla $m \geqslant 2$

$$n_m = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \setminus \{n_k : k = 1, \dots, m-1\} : |x(n)| = \max_{i \in \mathbb{N} \setminus \{n_k : k=1,\dots,m-1\}} |x(i)| \right\}.$$

Połóżmy

$$\overline{x} = (|x(n_1)|, |x(n_2)|, |x(n_3)|, \dots) \tag{2.1}$$

oraz

$$\widetilde{\mathcal{F}_x} = \{\overline{x}_{i,\epsilon,\pi} : i \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}, \epsilon \in \mathcal{E}, \pi \in \Pi\}. \tag{2.2}$$

Rozważmy teraz funkcję $p : \ell_1 \times \ell_1 \to [0, \infty)$ określoną dla dowolnego $(x, y) \in \ell_1 \times \ell_1$ wzorem

$$p(x, y) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) - \epsilon(n) y(\pi(n))| \right\},$$

gdzie infimum jest wzięte po wszystkich permutacjach $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i po wszystkich ciągach znaków $\epsilon = (\epsilon(n))_{n \in \mathbb{N}}$, $\epsilon(n) = \pm 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Łatwo wykazać, że tak określona funkcja p ma dla dowolnych $x, y, z \in \ell_1$ następujące własności:

(I) $p(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \in \widetilde{\mathcal{F}_x}$,

(II) $p(x, y) = p(y, x) = p(x, -y) = p(-x, -y)$,

(III) $p(x, y) \leqslant p(x, z) + p(z, y)$,

(IV) $|\|x\| - \|y\|| \leqslant p(x, y) \leqslant \|x - y\|$,

(V) $p(x, y) = p(\overline{x}, \overline{y})$.

Pseudometryka p, po raz pierwszy wprowadzona w pracy [56], okazała się być głównym narzędziem w badaniach dotyczących prawie izometrycznych ℓ_1-predualnych. Możemy teraz przejść do zaprezentowania wyników z pracy [56].

Stwierdzenie 2.2.1 (Ł. Piasecki [56]). *Dla $x^*, y^* \in B_{\ell_1}$ następujące stwierdzenia są równoważne.*

1. $d(W_{x^*}, W_{y^*}) = 0$.

2. $p(x^*, y^*) = 0$.

Stwierdzenie 2.2.2 (Ł. Piasecki [56]). *Dla $x^*, y^* \in B_{\ell_1}$ następujące stwierdzenia są równoważne.*

1. $W_{x^*} = W_{y^*}$.

2. Istnieje skończony ciąg znaków $(\epsilon(n))_{n=1}^{j}$ i permutacja $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że

$$x^* = \sum_{n=1}^{j} \epsilon(n) y^*(n) e^*_{\pi(n)} + \sum_{n=j+1}^{\infty} y^*(n) e^*_{\pi(n)}.$$

Zanim przejdziemy do dalszej części rozprawy, wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$\mathcal{F}_{W_{x^*}} = \left\{ W_{\overline{x^*}_{i,\epsilon}} : i \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}, \epsilon \in \mathcal{E} \right\}.$$

Ponadto zapis $X \in \mathcal{F}_{W_{x^*}}$ będzie oznaczać, że przestrzeń Banacha X jest izometrycznie izomorficzna z $W_{\overline{x^*}_{i,\epsilon}}$ dla pewnego $i \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ i dla pewnego $\epsilon \in \mathcal{E}$.

Twierdzenie 2.2.3 (Ł. Piasecki [56]). *Niech $x^* \in B_{\ell_1}$ i niech X będzie przestrzenią Banacha. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

1. $d(X, W_{x^*}) = 0$.

2. $X \in \mathcal{F}_{W_{x^*}}$.

Wprowadźmy teraz w zbiorze $\mathcal{H}$ relację równoważności $\sim$ określoną w następujący sposób:

$$W_{x^*} \sim W_{y^*} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } d(W_{x^*}, W_{y^*}) = 0.$$

Rozważmy przestrzeń ilorazową $\mathcal{H}/_\sim$ i funkcję $d_{\mathcal{H}/_\sim} : \mathcal{H}/_\sim \times \mathcal{H}/_\sim \to [0, \infty)$ określoną wzorem

$$d_{\mathcal{H}/_\sim}([W_{x^*}], [W_{y^*}]) = d(W_{x^*}, W_{y^*}).$$

Wówczas $(\mathcal{H}/_\sim, d_{\mathcal{H}/_\sim})$ jest przestrzenią metryczną.

Zauważmy, że przywołane wyniki (patrz Stwierdzenie 2.2.1 i Stwierdzenie 2.2.2) pozwalają nam precyzyjnie opisać każdą z warstw $[W_{e^*}] \in \mathcal{H}/_\sim$. Zauważmy w tym miejscu, że dla dowolnej warstwy $[W_{e^*}] \in \mathcal{H}/_\sim$ mamy jedną z dwóch możliwości:

- warstwa $[W_{e^*}]$ składa się (z dokładnością do izometrii) tylko z przestrzeni W_{e^*} (równoważnie, $e^* = (e^*(1), \dots, e^*(n), 0, 0, \dots)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$),
- warstwa $[W_{e^*}]$ składa się z nieskończenie wielu elementów (równoważnie, $e^*(i) \neq 0$ dla nieskończenie wielu $i \in \mathbb{N}$).

Stąd możemy wywnioskować, że $[c_0] = \{c_0\}$ i $[c] = \{c\}$.

Uwaga 2.2.4. Należy zaznaczyć, że konstrukcja zbioru $\widetilde{\mathcal{F}_x}$ jest drobną korektą tej wprowadzonej w pracy [56]. Zauważmy, że zastępując $\overline{x}_{i,\epsilon,\pi}$ przez $x_{i,\epsilon,\pi}$ w (2.2), nie uwzględniamy przypadku "symetrycznego" tzn. gdy ciąg x zawiera zera i usuwamy pewną ich ilość. Stąd zbiór $\widetilde{\mathcal{F}_x}$ w pracy [56] nie zawsze jest dobrze określony. W konsekwencji zbiór $\mathcal{F}_{W_f}$ używany w treści Twierdzenia 2.1 w [56] nie zawsze odzwierciedla wszystkie możliwe przypadki wynikające z treści dowodu tego twierdzenia i dlatego powinien być zastąpiony przez

$$\mathcal{F}_{W_f} = \left\{ W_{\overline{f}_{i,\epsilon}} : i \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}, \epsilon \in \mathcal{E} \right\},$$

gdzie $\overline{f}$ jest zdefiniowany przez (2.1), i wtedy, kontynuując jak w [56], dla $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\overline{f}_{i,\epsilon} = \overline{f}(1)e_1^* + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon(n)\overline{f}(n+1)e_{n+i+1}^*$$

i

$$\overline{f}_{\infty,\epsilon} = \overline{f}(1)e_1^* + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon(n)\overline{f}(n+1)e_{2n+1}^*.$$

Te korekty nie wpływają ani na dowód Twierdzenia 2.1 ani inne wyniki z [56].

Powyższa uwaga została uwzględniona w pracy [30] (Uwaga 2.5).

Na koniec warto wspomnieć, że z pojęciem prawie izometrycznych przestrzeni Banacha związany jest również pewien istotny obszar badań. Badania te dotyczą niezmienniczości pewnych własności przestrzeni Banacha przy odległości Banacha-Mazura 0. Tematyka ta była szeroko omawiana w pracach [55, 56]. Mówimy, że dana własność $\mathcal{P}$ *nie jest niezmiennicza przy odległości Banacha-Mazura* 0, jeżeli istnieją dwie przestrzenie Banacha X i Y takie, że X ma własność $\mathcal{P}$, Y nie ma tej własności i $d(X,Y) = 0$. Do takich własności należą np. wielościenność (patrz Przykład 4.1.6), własność rozszerzania dla operatorów zwartych (patrz Przykład 4.2.9) czy słaba* własność punktu stałego (patrz Przykład 4.4.10, Uwaga 4.4.17), które to zostaną szerzej omówione w rozdziale czwartym niniejszej rozprawy.

ROZDZIAŁ 3

Dystorsje włożeń izomorficznych pomiędzy pewnymi L_1-predualnymi

Warto zaznaczyć, że dotychczas głównym obiektem badań dotyczących odległości Banacha-Mazura w klasie L_1-predualnych były przestrzenie $C_0(K)$ (patrz podrozdział 2.1). Co więcej, spośród znanych wyników jest tylko kilka podających jej dokładne wartości. W tym rozdziale przedstawimy nowe wyniki dotyczące oszacowań odległości Banacha-Mazura oraz ich dokładne wartości dla pewnych L_1-predualnych, w tym takich ich przykładów, które nie są przestrzeniami $C_0(K)$. Ponadto należy wspomnieć, że prezentowane wyniki odegrają kluczową rolę w kontekście badań poświęconych stabilności pewnych geometrycznych własności L_1-predualnych oraz metrycznych własności przestrzeni $(\mathcal{H}/_{\sim}, d_{\mathcal{H}/_{\sim}})$ wprowadzonej w poprzednim rozdziale.

3.1 Dystorsja włożenia izomorficznego przestrzeni c

Pierwsze kluczowe twierdzenie tego rozdziału będzie dotyczyć oszacowania dystorsji włożenia izomorficznego przestrzeni c w L_1-predualną X taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$. Warto w tym miejscu odnotować, że fakt istnienia takiego włożenia jest konsekwencją wyniku M. Zippina [61], który głosi, że każda nieskończenie wymiarowa L_1-predualna zawiera podprzestrzeń izometryczną z c_0. Zanim jednak przejdziemy do sformułowania i udowodnienia rzeczonego twierdzenia, przytoczymy pewne wyniki pomocnicze.

Twierdzenie 3.1.1 (Twierdzenie 6, rozdział 7, §22, [39])**.** *Niech X będzie L_1-predualną. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

1. *$X^* = \ell_1(\Gamma)$ dla pewnego zbioru Γ.*

2. *Jeżeli $Y \subset X$ jest ośrodkowa, to Y^* jest ośrodkowa.*

Twierdzenie 3.1.2 (L. Veselý [60])**.** *Niech X będzie wielościenną przestrzenią Banacha i $E = \{x^* \in S_{X^*} : D(x) = \{x^*\}$ dla pewnego $x \in S_X\}$. Wtedy $B_{X^*} = \overline{\operatorname{conv} E}$ i moc zbioru E jest równa minimalnej mocy gęstego podzbioru przestrzeni X i jednocześnie minimalnej mocy gęstego podzbioru przestrzeni X^*.*

Możemy teraz przejść do wspomnianego na początku rozdziału twierdzenia.

Twierdzenie 3.1.3 (A. Gergont, Ł. Piasecki [29]). *Jeżeli X jest nieskończenie wymiarową L_1-predualną taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$, to dla każdego izomorficznego włożenia T z c w X mamy*

$$\|T\| \, \|T^{-1}\| \geqslant \frac{3-r}{1+r}.$$

Dowód. Zauważmy, że jeżeli $(\operatorname{ext} B_{X^*})' = \{0\}$, to $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla każdego $r > 0$. Dlatego wystarczy udowodnić powyższą nierówność dla dowolnego $r > 0$. Wiadomo, że przestrzeń X jest wielościenna (patrz [28] oraz podrozdział 4.1). Zatem stosując Twierdzenia 3.1.1 i 3.1.2 wnioskujemy, że $X^* = \ell_1(\Gamma)$ dla pewnego zbioru Γ. Niech $j : X \to X^{**}$ będzie włożeniem kanonicznym, tj. $j(x)(x^*) = x^*(x)$ dla dowolnego $x \in X$ i dowolnego $x^* \in X^*$. Oczywiście przestrzeń X jest izometryczna z $j(X) \subset \ell_\infty(\Gamma)$. Dla przejrzystości dowodu podzielimy go teraz na trzy części.

Krok 1. Twierdzimy, że dla dowolnego niezerowego elementu $y = (y(\gamma))_{\gamma\in\Gamma} \in j(X) \subset \ell_\infty(\Gamma)$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony zbiór $\Gamma_1 \subset \Gamma$ taki, że

$$\sup\{|y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_1\} < (r+\varepsilon)\|y\|.$$

Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje niezerowy element $y = (y(\gamma))_{\gamma\in\Gamma} \in j(X)$ i $\varepsilon > 0$ taki, że zbiór

$$\Gamma_2 = \left\{\gamma \in \Gamma : |y(\gamma)| \geqslant \left(r + \frac{3}{4}\varepsilon\right)\|y\|\right\}$$

jest nieskończony. Połóżmy $z = y/\|y\|$. Wybierzmy dowolny słaby* punkt skupienia e^* zbioru $\left\{e^*_\gamma : \gamma \in \Gamma_2\right\}$ i rozważmy następujące słabe* otoczenie punktu e^*:

$$V_{e^*}(z, \varepsilon/4) = \left\{x^* \in \ell_1(\Gamma) : |z(x^*) - z(e^*)| < \frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

Ponieważ istnieje $\gamma_0 \in \Gamma_2$ taki, że $e^*_{\gamma_0} \in V_{e^*}(z, \varepsilon/4)$, więc mamy jedną z dwóch możliwości: $z(e^*) > r + \varepsilon/2$ lub $z(e^*) < -r - \varepsilon/2$. W związku z tym $\|e^*\| > r + \varepsilon/2$, co prowadzi do sprzeczności z naszym założeniem, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$.

Przyjmijmy teraz, że $e = (1, 1, 1, \dots) \in c$ i $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) \in c$, gdzie 1 występuje na n-tym miejscu.

Krok 2. Niech $T : c \to j(X)$ będzie ograniczonym operatorem liniowym. Twierdzimy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego skończonego zbioru $\Gamma_3 \subset \Gamma$ jest co najwyżej skończenie wiele elementów zbioru $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, dla których zachodzi następujący warunek:

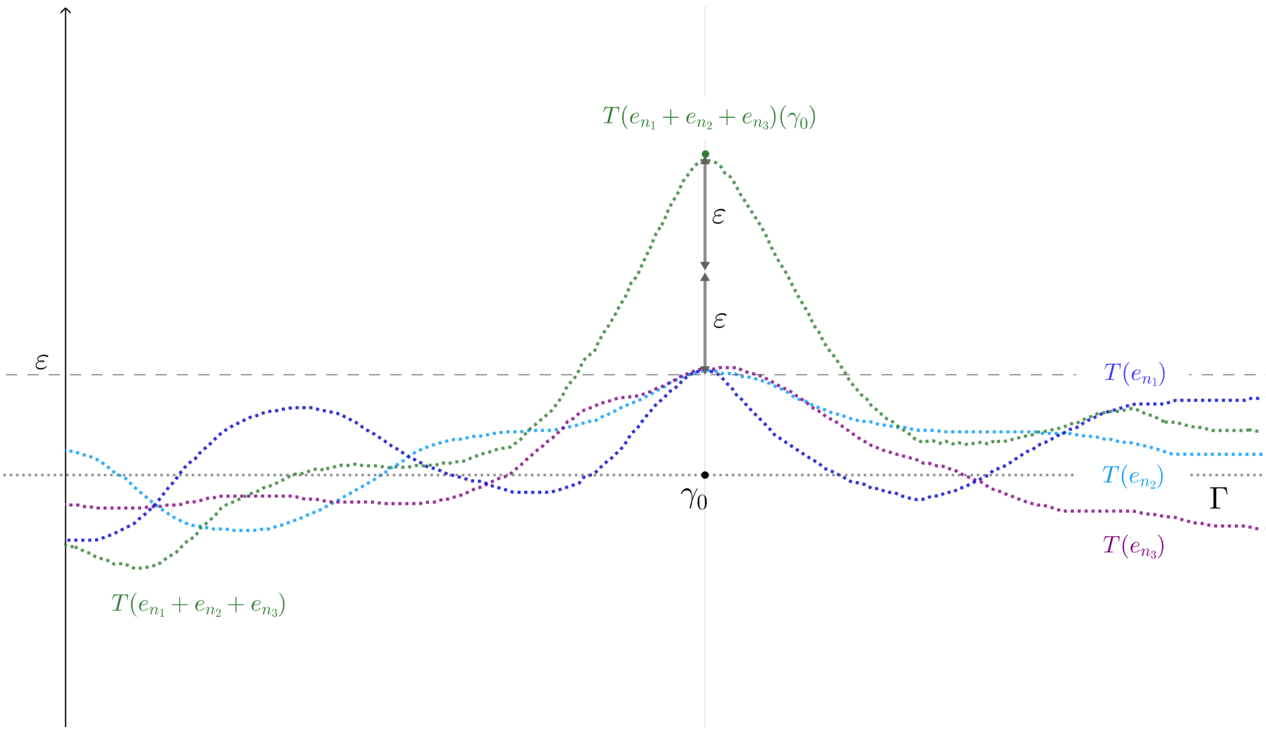
$$|T(e_n)(\gamma)| \geqslant \varepsilon$$

dla co najmniej jednego $\gamma \in \Gamma_3$. Załóżmy, że nie jest to prawdą. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$, $\gamma_0 \in \Gamma$ i podciąg $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $|T(e_{n_k})(\gamma_0)| \geqslant \varepsilon$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Wybierając podciąg (jeśli to konieczne) możemy założyć, że albo $T(e_{n_k})(\gamma_0) \geqslant \varepsilon$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ albo $T(e_{n_k})(\gamma_0) \leqslant -\varepsilon$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Rozważymy pierwszy przypadek. Rozumowanie

w drugim przypadku jest podobne. Niech $C > 0$ będzie dowolnie wybraną liczbą rzeczywistą. Niech $K \in \mathbb{N}$ będzie taka, że $K \cdot \varepsilon > C$. Wtedy $\left\| \sum_{k=1}^{K} e_{n_k} \right\| = 1$ i

$$\left\| T\left(\sum_{k=1}^{K} e_{n_k}\right)\right\| \geqslant \left| T\left(\sum_{k=1}^{K} e_{n_k}\right)(\gamma_0)\right| = \sum_{k=1}^{K} T(e_{n_k})(\gamma_0) \geqslant K \cdot \varepsilon > C.$$

Prowadzi to do sprzeczności z założeniem ograniczoności operatora T.



Rysunek 3.1: Ilustracja Kroku 2.

Krok 3. Niech $T : c \to j(X)$ będzie włożeniem izomorficznym. Bez straty na ogólności rozważań możemy założyć, że $\|T^{-1}\| = 1$. Wtedy T zwiększa normę, tj. $\|Tx\| \geqslant \|x\|$ dla każdego $x \in c$ (patrz Uwaga 2.1.5). Załóżmy teraz, że $\|T\| < (3-r)/(1+r)$. Pokażemy, że to założenie prowadzi do sprzeczności. Ponieważ $T(e) \in j(X)$, z Kroku 1 łatwo wnioskujemy, że istnieje skończony zbiór $\Gamma_1 \subset \Gamma$ taki, że

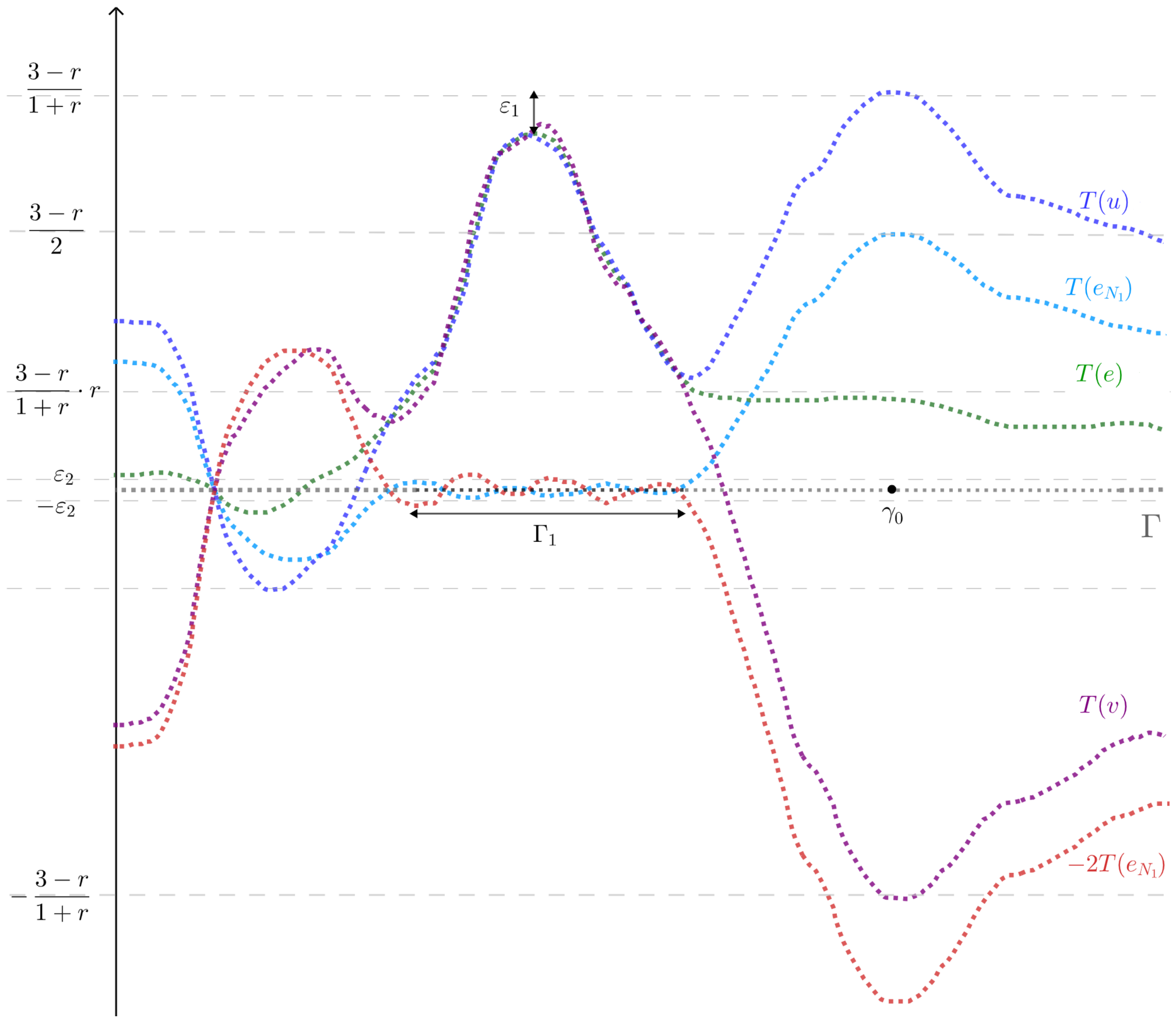
$$\sup\left\{|T(e)(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_1\right\} < r \cdot \frac{3-r}{1+r}.$$

Niech $\varepsilon_1 > 0$ będzie taki, że $\|T(e)\| + \varepsilon_1 = (3-r)/(1+r)$. Połóżmy

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{1+r}{4}.$$

Z Kroku 2 wiemy, że istnieje liczba $N_1 \in \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnego $n \geqslant N_1$ i dla dowolnego $\gamma \in \Gamma_1$ mamy $|T(e_n)(\gamma)| < \varepsilon_2$. Rozważmy element

$$u = e + \frac{2 \cdot (1-r)}{1+r} e_{N_1}.$$



Rysunek 3.2: Ilustracja Kroku 3 (dla $r = 1/4$).

Ponieważ $\|u\| = (3-r)/(1+r)$ i T zwiększa normę, więc $\|T(u)\| \geqslant (3-r)/(1+r)$. Dla dowolnego $\gamma \in \Gamma_1$ mamy

$$\begin{aligned} |T(u)(\gamma)| &= \left| T(e)(\gamma) + \frac{2 \cdot (1-r)}{1+r} T(e_{N_1})(\gamma) \right| < \|T(e)\| + \frac{2 \cdot (1-r)}{1+r} \cdot \varepsilon_2 \\ &\leqslant \|T(e)\| + \frac{\varepsilon_1}{2} < \frac{3-r}{1+r}. \end{aligned}$$

Wobec faktu, że Γ_1 jest skończony, możemy napisać

$$\max\{|T(u)(\gamma)| : \gamma \in \Gamma_1\} < \frac{3-r}{1+r}.$$

W związku z tym, dla dowolnego $\eta > 0$ istnieje $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \Gamma_1$ taki, że

$$\frac{3-r}{1+r} - \eta < |T(u)(\gamma_0)| \leqslant |T(e)(\gamma_0)| + \frac{2(1-r)}{1+r} \cdot |T(e_{N_1})(\gamma_0)|$$

i stąd

$$\begin{aligned}|T(e_{N_1})(\gamma_0)| &> \frac{1+r}{2(1-r)}\cdot\Big(\frac{3-r}{1+r}-\eta-|T(e)(\gamma_0)|\Big) > \frac{1+r}{2(1-r)}\cdot\Big(\frac{3-r}{1+r}-\eta-r\cdot\frac{3-r}{1+r}\Big)\\ &= \frac{3-r}{2}-\eta\cdot\frac{1+r}{2(1-r)}.\end{aligned}$$

Rozważmy teraz element $v = e - 2e_{N_1}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\|T(v)\| &\geqslant |T(v)(\gamma_0)| \geqslant 2\,|T(e_{N_1})(\gamma_0)| - |T(e)(\gamma_0)| > 2\cdot\left(\frac{3-r}{2}-\eta\cdot\frac{1+r}{2(1-r)}\right)-r\cdot\frac{3-r}{1+r}\\ &= \frac{3-r}{1+r}-\eta\cdot\frac{1+r}{1-r}.\end{aligned}$$

Przechodząc do granicy z $\eta \to 0$ i mając na uwadze, że $\|v\| = 1$, otrzymujemy $\|T\| \geqslant (3-r)/(1+r)$, sprzeczność. □

Uwaga 3.1.4. Idea powyższego dowodu wywodzi się od metody dowodowej użytej przez Camberna (patrz Uwaga 2.1.6). Mamy na myśli to, że przyjmując w powyższym dowodzie za L_1-predualną X przestrzeń c_0 otrzymamy kluczowe elementy jego toku rozumowania. W tym przypadku oczywiście $r = 0$. Rozumowanie możemy rozpocząć od Kroku 2, Krok 1 pomijamy. Zauważmy, że z Kroku 2 możemy wybrać taki podciąg $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, aby $(T(e_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ był ciągiem o prawie rozłącznych nośnikach. Następnie możemy przejść do Kroku 3. Na początku zakładamy, że operator $T : c \to c_0$ jest włożeniem izomorficznym zwiększającym normę (Cambern w swoim dowodzie zakładał dodatkowo, że T jest suriekcją). Następnie zamiast Kroku 1 bezpośrednio wykorzystujemy fakt, że $T(e) \in c_0$. Dalsze rozumowanie poprowadzone dla $r = 0$ kończy dowód.

Trzeba zaznaczyć, że brak jawnego modelu rozważanej przez nas L_1-predualnej X takiej, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$, wymusił na nas poszukiwanie innej ścieżki postępowania. Było nią dla nas rozważenie podprzestrzeni $j(X)$ przestrzeni $\ell_\infty(\Gamma)$, skąd uzyskaliśmy niepełne, ale dla naszych rozważań wystarczające informacje na temat jej elementów (patrz Krok 1).

Należy jednak podkreślić, że główną trudnością problemu znalezienia optymalnego oszacowania odległości Banacha-Mazura jest jego dwutorowość. Mamy na myśli to, że szacowanie odległości Banacha-Mazura od dołu (patrz Krok 3) jest powiązane z poszukiwaniem izomorfizmów o jak najmniejszej możliwej dystorsji. Izomorfizmy te niekiedy okazują się mieć dosyć skomplikowaną formułę (patrz Przykład 3.1.9 i Przykład 3.2.4). Z drugiej strony dystorsja uzyskanego izomorfizmu może sugerować wielkość oszacowania od dołu, którą należy wykazać.

Zanim przejdziemy do wniosków wynikających z Twierdzenia 3.1.3 przywołamy wykorzystywane w dalszej części pracy pojęcia.

Mówimy, że przestrzeń Banacha X zawiera *prawie izometryczne kopie* przestrzeni Y, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje podprzestrzeń Z przestrzeni X taka, że Z i Y są $(1+\varepsilon)$-*izomorficzne*, tzn. istnieje izomorfizm $T : Z \to Y$ taki, że dla dowolnego $x \in Z$

$$\|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant (1+\varepsilon)\,\|x\|\,.$$

Wniosek 3.1.5 (A. Gergont, Ł. Piasecki [29]). *Niech X będzie nieskończenie wymiarową L_1--predualną taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$, a Y niech będzie przestrzenią Banacha zawierającą prawie izometryczne kopie przestrzeni c. Wtedy dla dowolnego włożenia izomorficznego T z Y w X (jeśli istnieje) mamy*

$$\|T\|\,\|T^{-1}\| \geqslant \frac{3-r}{1+r}.$$

W szczególności, jeżeli X i Y są izomorficzne, to $d(X,Y) \geqslant \ln \frac{3-r}{1+r}$.

W naszych dalszych rozważaniach istotną rolę będą odgrywać następujące wyniki.

Lemat 3.1.6 (Lemat 6, rozdział 7, §22, [39]). *Niech X będzie L_1-predualną i $Y \subset X$ jej ośrodkową podprzestrzenią. Wtedy istnieje ośrodkowa L_1-predualna Z taka, że $Y \subset Z \subset X$.*

Twierdzenie 3.1.7 (M. Zippin [62]). *Niech X będzie nieskończenie wymiarową ośrodkową L_1-predualną i załóżmy, że B_X ma punkt ekstremalny. Wtedy X zawiera prawie izometryczne kopie przestrzeni c.*

Wniosek 3.1.8 (A. Gergont, Ł. Piasecki [29]). *Niech X będzie nieskończenie wymiarową L_1-predualną taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$. Rozważmy nieskończenie wymiarową przestrzeń $A(S)$, dla której istnieje włożenie izomorficzne T z $A(S)$ w X. Wtedy $\|T\|\,\|T^{-1}\| \geqslant (3-r)/(1+r)$. W szczególności, jeżeli $A(S)$ i X są izomorficzne, to*

$$d(A(S),X) \geqslant \ln \frac{3-r}{1+r}.$$

Dowód. Oznaczmy przez f funkcję stałą, równą 1 na S. Oczywiście $f \in \operatorname{ext} B_{A(S)}$, ponieważ $f \in \operatorname{ext} B_{C(S)}$. Niech Y będzie nieskończenie wymiarową ośrodkową podprzestrzenią przestrzeni $A(S)$ zawierającą f. Z Lematu 3.1.6, $A(S)$ zawiera ośrodkową podprzestrzeń Z taką, że $Y \subset Z$ i Z jest L_1-predualną. Ponieważ $f \in \operatorname{ext} B_Z$, więc z Twierdzenia 3.1.7 przestrzeń Z zawiera prawie izometryczne kopie przestrzeni c. Teza wynika z Twierdzenia 3.1.3 (poprzez Wniosek 3.1.5). $\square$

Warto podkreślić, że dla dowolnego $r \in (0,1)$ oszacowanie otrzymane w Twierdzeniu 3.1.3 jest dokładne, czego dowodzi poniższy przykład.

Przykład 3.1.9 (A. Gergont, Ł. Piasecki [29]). Ustalmy $0 < r < 1$. Niech $e^* = (r,0,0,\dots)$. Rozważmy hiperpłaszczyznę

$$W_{e^*} = \left\{ x = (x(1), x(2), \dots) \in c : \lim_{i\to\infty} x(i) = rx(1) \right\}.$$

Warto przypomnieć, że tak określona W_{e^*} jest wspominanym już przykładem M przestrzeni (patrz Przykład 1.0.7). Z punktów (i) i (iii) Twierdzenia 1.0.4 wiemy, że $W_{e^*}^* = \ell_1$ i

$$e_n^* \xrightarrow{\sigma(\ell_1, W_{e^*})} e^* = (r,0,0,\dots).$$

Rozważmy odwzorowanie $T : c \to W_{e^*}$ określone dla dowolnego $x = (x(1), x(2), \dots) \in c$ wzorem

$$T(x) = \left(x(0), \frac{1+r}{2}x(1) + \frac{r-1}{2}x(0), \frac{1+r}{2}x(2) + \frac{r-1}{2}x(0), \dots \right),$$

gdzie $x(0) = \lim_{i\to\infty} x(i)$. Łatwo wykazać, że T jest izomorfizmem i $\|T\| \leqslant 1$. Aby pokazać, że $\|T\| = 1$ wystarczy rozważyć element $(1, 1, 1, \dots) \in S_c$. Z drugiej strony dla dowolnego $x = (x(1), x(2), \dots) \in W_{e^*}$,

$$T^{-1}(x) = \Big(x(1), \frac{2}{1+r}x(2) + \frac{1-r}{1+r}x(1), \frac{2}{1+r}x(3) + \frac{1-r}{1+r}x(1), \dots\Big).$$

Nietrudno zauważyć, że $\|T^{-1}\| \leqslant (3-r)/(1+r)$. Aby pokazać, że $\|T^{-1}\| = (3-r)/(1+r)$ wystarczy rozważyć element $(1, 1, r, r, r, \dots) \in S_{W_{e^*}}$. Stąd $\|T\|\,\|T^{-1}\| = (3-r)/(1+r)$. Z Twierdzenia 3.1.3 otrzymujemy

$$d(c, W_{e^*}) = \ln\frac{3-r}{1+r}.$$

Uwaga 3.1.10. Zauważmy, że Przykład 3.1.9 można rozszerzyć na przypadek nieośrodkowych L_1-predualnych. W rzeczy samej wystarczy rozważyć $C_0(\Gamma)\oplus W_r$, gdzie Γ jest dowolnym zbiorem nieprzeliczalnym. Wtedy

$$d(C_0(\Gamma)\oplus W_r, C_0(\Gamma)\oplus c) = \ln\frac{3-r}{1+r}.$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że z Przykładu 3.1.9 wynika, że dowolna liczba rzeczywista z przedziału $(0, \ln 3)$ jest odległością Banacha-Mazura dla pewnych przestrzeni Banacha. Przypomnijmy również, że $\ln 3$ jest odległością Banacha-Mazura pomiędzy przestrzeniami c i c_0 (Twierdzenie 2.1.4).

3.2 Dystorsja włożenia izomorficznego przestrzeni W_{e^*}

Twierdzenie 3.1.3 ze względu na rozważaną w nim przestrzeń c pozwoliło uzyskać w obrębie L_1-predualnych pewne optymalne wyniki stabilnościowe dotyczące wielościenności (patrz podrozdział 4.1) i własności rozszerzania operatorów zwartych (patrz podrozdział 4.2), a także, w obrębie pewnych klas ℓ_1-predualnych, dokładne wartości stałych stabilności słabej* własności punktu stałego (patrz podrozdział 4.4). W toku dalszych badań prowadzonych w kontekście pewnych metrycznych własności przestrzeni $(\mathcal{H}/_\sim, d_{\mathcal{H}/_\sim})$ (patrz podrozdział 4.3) okazało się, że Twierdzenie 3.1.3 jest niewystarczające, efektem czego powstało jego poniższe uogólnienie.

Twierdzenie 3.2.1 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30])**.** *Niech $e^* \in B_{\ell_1}$ i niech X będzie nieskończenie wymiarową L_1-predualną taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < \|e^*\|$. Wtedy dla dowolnego włożenia izomorficznego T z W_{e^*} w X mamy*

$$\|T\|\,\|T^{-1}\| \geqslant \frac{1 + 2\,\|e^*\| - r}{1+r}.$$

Zanim przejdziemy do dowodu powyższego twierdzenia, przytoczmy pewien rezultat pomocniczy.

Lemat 3.2.2. (Wniosek z [21, Lemat 2.1])**.** *Niech $(x_m^*) \subset B_{\ell_1}$ będzie ciągiem zbieżnym normowo do x^*. Wtedy*

$$\lim_{m\to\infty} d(W_{x_m^*}, W_{x^*}) = 0.$$

Dowód Twierdzenia 3.2.1. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 3.1.3, możemy ograniczyć nasze rozważania do przypadku, gdy $r > 0$. Wiadomo, że $X^* = \ell_1(\Gamma)$ dla pewnego zbioru Γ i uzasadnienie tego faktu znajduje się we wstępnej części dowodu Twierdzenia 3.1.3. Niech $j : X \to X^{**}$ będzie włożeniem kanonicznym, tj. $j(x)(x^*) = x^*(x)$ dla dowolnego $x \in X$ i dowolnego $x^* \in X^*$. Oczywiście przestrzeń X jest izometryczna z $j(X) \subset \ell_\infty(\Gamma)$.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy e^* ma co najwyżej skończenie wiele niezerowych współrzędnych tj. $e^* = (e^*(1), \ldots, e^*(m), 0, 0, \ldots)$. Niech

$$e = (\operatorname{sgn} e^*(1), \ldots, \operatorname{sgn} e^*(m), \|e^*\|, \|e^*\|, \ldots)$$

i $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, gdzie 1 występuje na n-tym miejscu. Oczywiście $e \in W_{e^*}$ i $e_n \in W_{e^*}$ dla dowolnego $n > m$. W Kroku 1 dowodu Twierdzenia 3.1.3 zostało pokazane, że dla dowolnego niezerowego elementu $y = (y(\gamma))_{\gamma\in\Gamma} \in j(X) \subset \ell_\infty(\Gamma)$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony zbiór $\Gamma_1 \subset \Gamma$ taki, że

$$\sup\{|y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_1\} < (r + \varepsilon)\|y\|.$$

Ponadto powtarzając rozumowanie z Kroku 2 dowodu Twierdzenia 3.1.3 i zakładając, że $T : W_{e^*} \to j(X)$ jest ograniczonym operatorem liniowym, w łatwy sposób otrzymujemy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego skończonego zbioru $\Gamma_2 \subset \Gamma$ jest co najwyżej skończenie wiele elementów w zbiorze $\{e_n : n > m\}$, dla których zachodzi następujący warunek:

$$|T(e_n)(\gamma)| \geqslant \varepsilon$$

dla co najmniej jednego $\gamma \in \Gamma_2$.

Niech $T : W_{e^*} \to j(X)$ będzie włożeniem izomorficznym. Bez straty na ogólności rozważań możemy założyć, że $\|T^{-1}\| = 1$. Wtedy T zwiększa normę tj. $\|T(x)\| \geqslant \|x\|$ dla dowolnego $x \in W_{e^*}$ (por. Uwaga 2.1.5). Załóżmy teraz, że $\|T\| < \frac{1+2\|e^*\|-r}{1+r}$. Ponieważ $T(e) \in j(X)$, wnioskujemy, że istnieje skończony zbiór $\Gamma_1 \subset \Gamma$ taki, że

$$\sup\{|T(e)(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_1\} < r \cdot \frac{1 + 2\|e^*\| - r}{1 + r}.$$

Niech $\varepsilon_1 > 0$ będzie taki, że $\|T(e)\| + \varepsilon_1 = (1 + 2\|e^*\| - r)/(1 + r)$. Połóżmy $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{1+r}{2(1+\|e^*\|)}$. Z poprzedniej części rozumowania wiemy, że istnieje liczba naturalna $N_1 > m$ taka, że dla każdego $n \geqslant N_1$ i dla każdego $\gamma \in \Gamma_1$ mamy $|T(e_n)(\gamma)| < \varepsilon_2$. Niech $u = e + \frac{(1+\|e^*\|)\cdot(1-r)}{1+r} e_{N_1}$. Wtedy dla dowolnego $\gamma \in \Gamma_1$ mamy

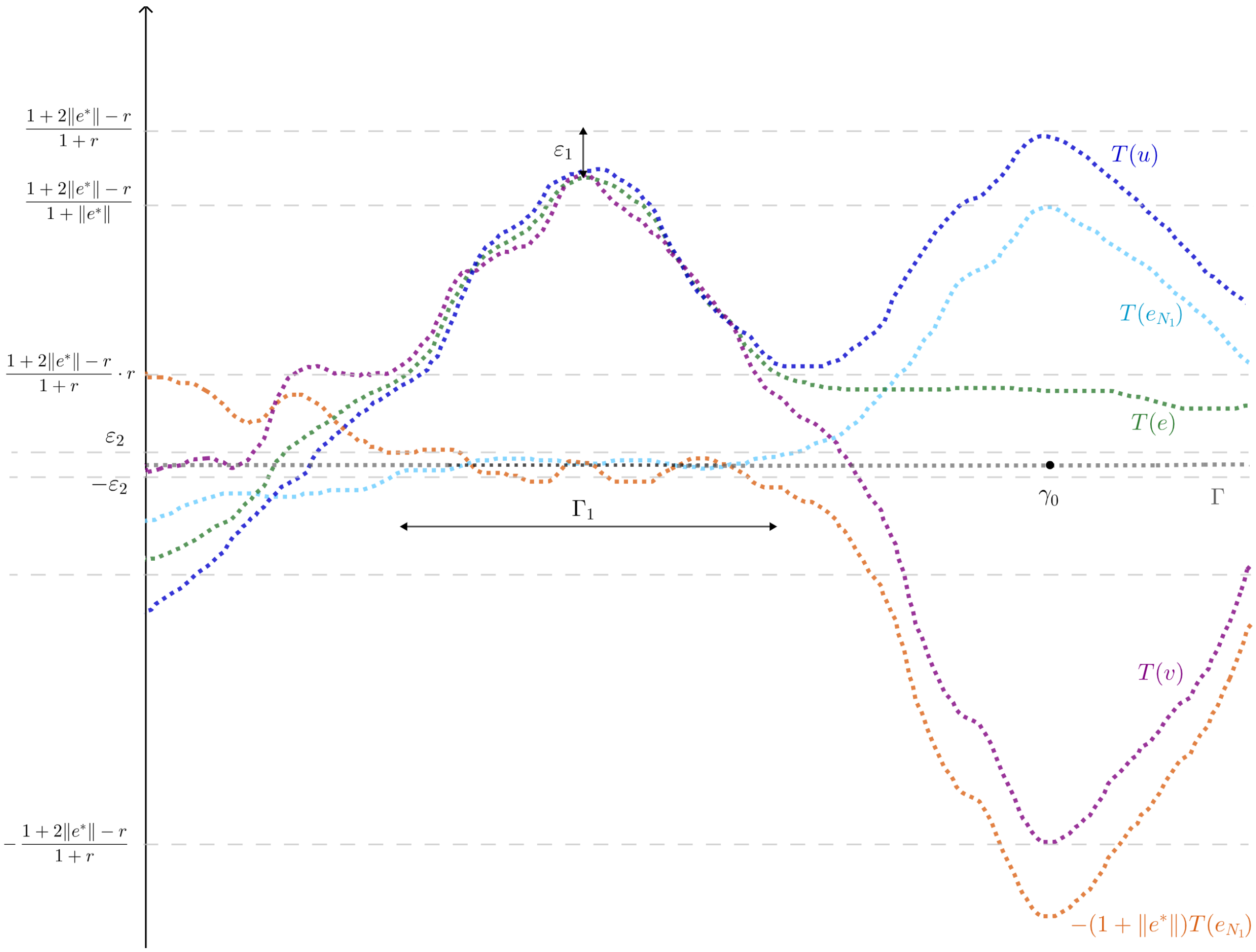
$$\begin{aligned} |T(u)(\gamma)| &= \left| T(e)(\gamma) + \frac{(1 + \|e^*\|) \cdot (1 - r)}{1 + r} T(e_{N_1})(\gamma) \right| < \|T(e)\| + \frac{(1 + \|e^*\|) \cdot (1 - r)}{1 + r} \cdot \varepsilon_2 \\ &\leqslant \|T(e)\| + \frac{\varepsilon_1}{2} < \frac{1 + 2\|e^*\| - r}{1 + r}, \end{aligned}$$

a zatem

$$\max\{|T(u)(\gamma)| : \gamma \in \Gamma_1\} < \frac{1 + 2\|e^*\| - r}{1 + r}.$$

Z drugiej strony, ponieważ $\|u\| = (1 + 2\|e^*\| - r)/(1 + r)$ i T zwiększa normę, więc $\|T(u)\| \geqslant (1 + 2\|e^*\| - r)/(1 + r)$. Stąd dla dowolnego $\eta > 0$ istnieje $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \Gamma_1$ taki, że

$$\frac{1 + 2\|e^*\| - r}{1 + r} - \eta < |T(u)(\gamma_0)| \leqslant |T(e)(\gamma_0)| + \frac{(1 + \|e^*\|)(1 - r)}{1 + r} \cdot |T(e_{N_1})(\gamma_0)|.$$



Rysunek 3.3: Ilustracja dowodu (dla $r = 1/4, \|e^*\| = 3/4$).

Zatem

$$\begin{aligned}
|T(e_{N_1})(\gamma_0)| &> \frac{1+r}{(1+\|e^*\|)(1-r)} \cdot \left(\frac{1+2\|e^*\|-r}{1+r} - \eta - |T(e)(\gamma_0)|\right) \\
&> \frac{1+r}{(1+\|e^*\|)(1-r)} \cdot \left(\frac{1+2\|e^*\|-r}{1+r} - \eta - r \cdot \frac{1+2\|e^*\|-r}{1+r}\right) \\
&= \frac{1+2\|e^*\|-r}{1+\|e^*\|} - \eta \cdot \frac{1+r}{(1+\|e^*\|)(1-r)}.
\end{aligned}$$

Rozważmy teraz element $v = e - (1+\|e^*\|)e_{N_1}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\|T(v)\| &\geqslant |T(v)(\gamma_0)| \geqslant (1+\|e^*\|)\,|T(e_{N_1})(\gamma_0)| - |T(e)(\gamma_0)| \\
&> (1+\|e^*\|) \cdot \left(\frac{1+2\|e^*\|-r}{1+\|e^*\|} - \frac{\eta \cdot (1+r)}{(1+\|e^*\|)(1-r)}\right) - r \cdot \frac{1+2\|e^*\|-r}{1+r} \\
&= \frac{1+2\|e^*\|-r}{1+r} - \eta \cdot \frac{1+r}{1-r}.
\end{aligned}$$

Przechodząc do granicy przy $\eta \to 0$ i biorąc pod uwagę, że $\|v\| = 1$, otrzymujemy $\|T\| \geqslant (1 + 2\|e^*\| - r)/(1 + r)$, co jest sprzeczne z naszym założeniem.

Przejdźmy teraz do ogólnego przypadku. Ustalmy $e^* \in B_{\ell_1} \setminus \{0\}$ i niech $T : W_{e^*} \to j(X)$ będzie włożeniem izomorficznym. Połóżmy

$$x_m^* = (e^*(1), \ldots, e^*(m), 0, 0, \ldots).$$

Ponieważ $\lim_{m\to\infty} \|e^* - x_m^*\| = 0$, więc z Lematu 3.2.2 otrzymujemy

$$\lim_{m\to\infty} d(W_{e^*}, W_{x_m^*}) = 0.$$

Zatem istnieją izomorfizmy $\phi_m : W_{x_m^*} \to W_{e^*}$ takie, że $\lim_{m\to\infty} \|\phi_m\| \|\phi_m^{-1}\| = 1$. Niech $U_m = T\phi_m$. Bazując na poprzednich rozważaniach, dla każdego m takiego, że $\|x_m^*\| > r$ mamy

$$\|T\| \|T^{-1}\| \|\phi_m\| \|\phi_m^{-1}\| \geqslant \|T\phi_m\| \|\phi_m^{-1}T^{-1}\| = \|U_m\| \|U_m^{-1}\| \geqslant \frac{1 + 2\|x_m^*\| - r}{1 + r}.$$

Przechodząc do granicy przy $m \to \infty$, otrzymujemy tezę. □

Dotychczas znana była dokładna wartość odległości Banacha-Mazura pomiędzy ℓ_1-predualnymi hiperpłaszczyznami w c jedynie w przypadku przestrzeni c_0 i W_{e^*} dla $e^* \in S_{\ell_1}$.

Stwierdzenie 3.2.3 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, R. Popescu [21])**.** *Jeżeli $e^* \in S_{\ell_1}$, to $d(c_0, W_{e^*}) = \ln 3$.*

Następny przykład uogólnia powyższy wynik oraz pokazuje, że dla każdego $0 \leqslant r < 1$ i dla każdego $e^* \in B_{\ell_1}$ takiego, że $\|e^*\| > r$, oszacowanie otrzymane w Twierdzeniu 3.2.1 jest dokładne.

Przykład 3.2.4 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30])**.** Niech $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ i $e^* = (e^*(1), e^*(2), \ldots) \in B_{\ell_1}$. Niech $x_m^* = (e^*(1), \ldots, e^*(m), 0, 0, \ldots)$. Rozważmy odwzorowanie $T : W_{\beta x_m^*} \to W_{\alpha x_m^*}$ określone dla dowolnego $x = (x(1), x(2), \ldots) \in W_{\beta x_m^*}$ w następujący sposób:

$$T(x)(i) = \begin{cases} x(i) & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant m, \\ \frac{1+\alpha\|x_m^*\|}{1+\beta\|x_m^*\|} x(i) + \frac{\alpha-\beta}{1+\beta\|x_m^*\|} \sum_{j=1}^m e^*(j)x(j) & \text{dla } i > m. \end{cases}$$

Łatwo wykazać, że T jest izomorfizmem oraz $\|T\| \leqslant 1$. Aby pokazać, że $\|T\| = 1$, wystarczy rozważyć element

$$(\operatorname{sgn} e^*(1), \ldots, \operatorname{sgn} e^*(m), \beta\|x_m^*\|, \beta\|x_m^*\|, \ldots) \in S_{W_{\beta x_m^*}}.$$

Z drugiej strony, dla dowolnego $x = (x(1), x(2), \ldots) \in W_{\alpha x_m^*}$ mamy

$$T^{-1}(x)(i) = \begin{cases} x(i) & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant m, \\ \frac{1+\beta\|x_m^*\|}{1+\alpha\|x_m^*\|} x(i) + \frac{\beta-\alpha}{1+\alpha\|x_m^*\|} \sum_{j=1}^m e^*(j)x(j) & \text{dla } i > m. \end{cases}$$

Łatwo wywnioskować, że $\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1+2\beta\|x_m^*\|-\alpha\|x_m^*\|}{1+\alpha\|x_m^*\|}$. W celu pokazania dokładności tego oszacowania wystarczy rozważyć element

$$(\operatorname{sgn} e^*(1), \ldots, \operatorname{sgn} e^*(m), 1, \alpha\|x_m^*\|, \alpha\|x_m^*\|, \ldots) \in S_{W_{\alpha x_m^*}}.$$

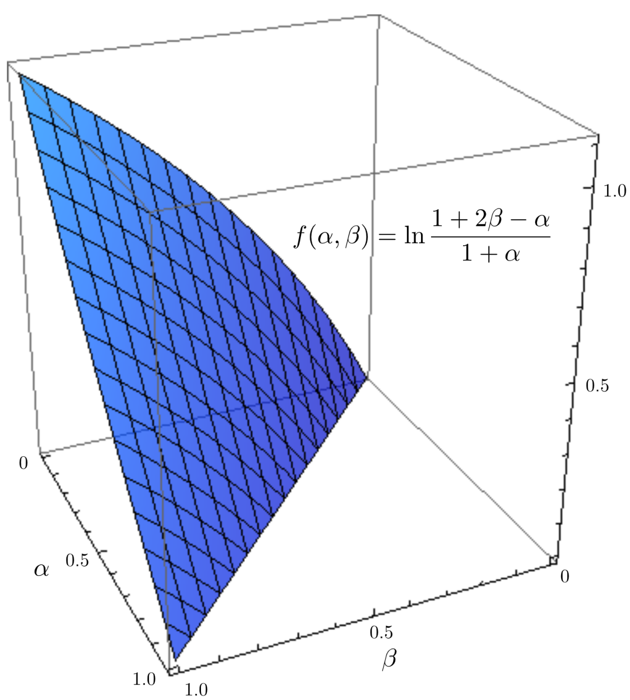
Stąd $\|T\| \|T^{-1}\| = \frac{1+2\beta\|x_m^*\| - \alpha\|x_m^*\|}{1+\alpha\|x_m^*\|}$. Zatem z Twierdzenia 3.2.1 otrzymujemy

$$d(W_{\beta x_m^*}, W_{\alpha x_m^*}) = \ln \frac{1 + 2\beta \|x_m^*\| - \alpha \|x_m^*\|}{1 + \alpha \|x_m^*\|}.$$

Ponieważ $\lim_{m\to\infty} \|e^* - x_m^*\| = 0$, więc z Lematu 3.2.2 dostajemy

$$d(W_{\beta e^*}, W_{\alpha e^*}) = \ln \frac{1 + 2\beta \|e^*\| - \alpha \|e^*\|}{1 + \alpha \|e^*\|}.$$

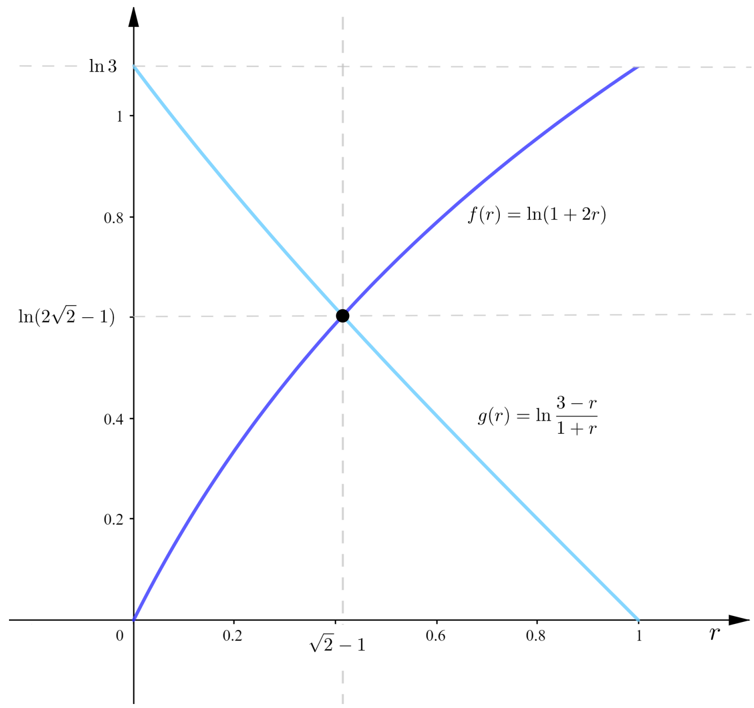
Uwaga 3.2.5. Zauważmy, że jeżeli w powyższym przykładzie przyjmiemy, że $x_m^* = e_1^*, \alpha = 0$ oraz $\beta = 1$, to odwzorowanie T sprowadza się do izomorfizmu z pracy Camberna [13] (patrz Uwaga 2.1.6).



Rysunek 3.4: Wykres funkcji ilustrującej zmianę odległości Banacha-Mazura pomiędzy hiperpłaszczyznami $W_{\alpha e_1^*}$ i $W_{\beta e_1^*}$ przy zmianie wartości parametrów α i β.

Uwaga 3.2.6. Jak już wcześniej wspomnieliśmy, w literaturze jest tylko kilka wyników podających dokładną wartość odległości Banacha-Mazura w obrębie przestrzeni Lindenstraussa i dotyczą one pewnych szczególnych przestrzeni $C_0(K)$ (patrz podrozdział 2.1). W tym kontekście, wynik otrzymany w Przykładzie 3.2.4 okazuje się być czymś nowym. Zauważmy, że jeżeli w Przykładzie 3.2.4 położymy $e^* = e_1^*$ przy równoczesnym założeniu, że $0 < \alpha < \beta < 1$, to uzyskamy przestrzenie $W_{\alpha e^*}$ i $W_{\beta e^*}$, które są M przestrzeniami, ale nie są $C_0(K)$ (patrz Przykład 1.0.7) i $d(W_{\alpha e^*}, W_{\beta e^*}) = \ln \frac{1+2\beta-\alpha}{1+\alpha}$ (patrz Rysunek 3.4). Według naszej wiedzy jest

to jedyny znany wynik, który podaje dokładną wartość odległości Banacha-Mazura pomiędzy G przestrzeniami, które nie są $C_0(K)$. Następnie, jeżeli w Przykładzie 3.2.4 położymy $e^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots\right)$, $\beta = 1$ i $0 < \alpha < 1$, to otrzymamy odległość Banacha-Mazura pomiędzy pewną przestrzenią $A(S)$ (patrz Przykład 1.0.6), a ℓ_1-predualną hiperpłaszczyzną w c.



Rysunek 3.5: Funkcje ilustrujące zmianę wartości odległości Banacha-Mazura hiperpłaszczyzny $W_{re_1^*}$ od odpowiednio przestrzeni c i c_0 przy zmianie parametru r.

Wniosek 3.2.7 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30])**.** *Dla dowolnego* $0 \leqslant r \leqslant 1$ *mamy* $d(W_{re_1^*}, c) = \ln \frac{3-r}{1+r}$, *podczas gdy* $d(W_{re_1^*}, c_0) = \ln(1+2r)$. *W konsekwencji hiperpłaszczyzną, która znajduje się w tej samej odległości Banacha-Mazura od* c, *co od* c_0 *jest* $W_{(\sqrt{2}-1)e_1^*}$ *(patrz Rysunek 3.5). W rzeczy samej,*

$$d(W_{(\sqrt{2}-1)e_1^*}, c_0) = d(W_{(\sqrt{2}-1)e_1^*}, c) = \ln\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Ponadto nie ma hiperpłaszczyzny W_{e^*} *równoodległej od* c *i* c_0 *o mniej niż* $\ln\left(2\sqrt{2} - 1\right)$. *Zwróćmy uwagę, że otrzymana dystorsja izomorfizmu pomiędzy przestrzeniami* $W_{(\sqrt{2}-1)e_1^*}$ *i* c *(i odpowiednio przestrzeniami* $W_{(\sqrt{2}-1)e_1^*}$ *i* c_0*) jest liczbą niewymierną.*

Wprowadźmy teraz następujące oznaczenie:

$$r^*(X) = \inf\{r > 0 : (\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset r B_{X^*}\}, \tag{3.1}$$

przy założeniu, że X jest dowolną ℓ_1-predualną. Teraz możemy przejść do prostej obserwacji wynikającej z Twierdzenia 3.2.1.

Wniosek 3.2.8. *Niech $X, Y \in \mathcal{F}$. Jeżeli $r^*(X) < r^*(Y)$, to*

$$d(X,Y) \geqslant \ln \frac{1+2r^*(Y)-r^*(X)}{1+r^*(X)}.$$

Naśladując konstrukcję przestrzeni ilorazowej $\mathcal{H}/_\sim$ oraz metryki $d_{\mathcal{H}/_\sim}$ możemy również wprowadzić relację równoważności $\sim$ w klasie $\mathcal{F}$ i tym samym otrzymać przestrzeń ilorazową $\mathcal{F}/_\sim$ oraz metrykę $d_{\mathcal{F}/_\sim}$. Zauważmy, że z Twierdzenia 2.2.3 wynika, że $\mathcal{H}/_\sim \subset \mathcal{F}/_\sim$. Z Wniosku 3.2.8 wynika natomiast, że dla dowolnych $Y, Z \in [X] \in \mathcal{F}/_\sim$ mamy $r^*(Y) = r^*(Z)$.

Wobec powyższych uwag, możemy teraz przejść do następującego przykładu.

Przykład 3.2.9 (A. Gergont, wynik nieopublikowany)**.** Niech $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ i $x_i^* \in B_{\ell_1}, i \in \mathbb{N}$. Połóżmy $X_t^\infty = \left(\sum_{i=1}^\infty W_{tx_i^*}\right)_{c_0}$ oraz $X_t^n = \left(\sum_{i=1}^n W_{tx_i^*}\right)_{\ell_\infty^n}$ dla $t \in [0,1]$. Z Przykładu 3.2.4 wiemy, że $d\left(W_{\alpha x_i^*}, W_{\beta x_i^*}\right) = \ln \frac{1+2\beta\|x_i^*\|-\alpha\|x_i^*\|}{1+\alpha\|x_i^*\|}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Ustalmy $\epsilon > 0$. Wtedy dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$ istnieje izomorfizm $\phi_i : W_{\beta x_i^*} \to W_{\alpha x_i^*}$ taki, że $\|\phi_i^{-1}\| = 1$, $\|\phi_i\| < \frac{1+2\beta\|x_i^*\|-\alpha\|x_i^*\|}{1+\alpha\|x_i^*\|} + \epsilon$. Niech $\phi : X_\beta^\infty \to X_\alpha^\infty$ będzie dany wzorem

$$\phi\left(x_1, x_2, \dots\right) = \left(\phi_1\left(x_1\right), \phi_2\left(x_2\right), \dots\right).$$

Ponieważ funkcja $f(s) = \frac{1+2\beta s-\alpha s}{1+\alpha s}$ jest rosnąca dla $s \in [0,1]$, łatwo wnioskujemy, że

$$\|\phi\| < \frac{1+2\beta r^*\left(X_1^\infty\right)-\alpha r^*\left(X_1^\infty\right)}{1+\alpha r^*\left(X_1^\infty\right)} + \epsilon$$

i $\|\phi^{-1}\| = 1$. Zatem

$$d\left(X_\alpha^\infty, X_\beta^\infty\right) \leqslant \ln \frac{1+2\beta r^*\left(X_1^\infty\right)-\alpha r^*\left(X_1^\infty\right)}{1+\alpha r^*\left(X_1^\infty\right)}.$$

Z Wniosku 3.2.8 otrzymujemy, że

$$d\left(X_\alpha^\infty, X_\beta^\infty\right) = \ln \frac{1+2\beta r^*\left(X_1^\infty\right)-\alpha r^*\left(X_1^\infty\right)}{1+\alpha r^*\left(X_1^\infty\right)}.$$

W analogiczny sposób można pokazać, że

$$d\left(X_\alpha^n, X_\beta^n\right) = \ln \frac{1+2\beta r^*\left(X_1^n\right)-\alpha r^*\left(X_1^n\right)}{1+\alpha r^*\left(X_1^n\right)}.$$

3.3 Dystorsja izomorfizmu z ℓ_1-predualnej na c_0

Rozdział ten zwieńczymy wynikiem dotyczącym oszacowania dystorsji dowolnego izomorfizmu z ℓ_1-predualnej X na c_0. Wynik ten jest uogólnieniem Twierdzenia 3.7 z pracy [21], gdzie rozważane są pewne ℓ_1-predualne X izomorficzne z c_0, dla których $r^*(X) = 1$. Ponadto wynik ten stanowi uzupełnienie Twierdzenia 3.1.3 i Twierdzenia 3.2.1.

Twierdzenie 3.3.1 (A. Gergont, wynik nieopublikowany)**.** *Jeżeli X jest ℓ_1-predualną izomorficzną z c_0, to*

$$d(X, c_0) \geqslant \ln(1+2r^*(X)).$$

Zanim jednak przejdziemy do dowodu powyższego twierdzenia, przywołamy pewne niezbędne w jego toku, wyniki pomocnicze.

Twierdzenie 3.3.2 (patrz np. R. E. Megginson [49]). *Niech $T : X \to Y$ będzie ograniczonym operatorem liniowym z przestrzeni Banacha X na przestrzeń Banacha Y. Wtedy istnieje operator liniowy $\widetilde{T} : X/\ker T \to Y$ taki, że:*

1) $\widetilde{T}$ jest izomorfizmem,

2) $T = \widetilde{T}\pi$, gdzie $\pi : X \to X/\ker T$ oznacza odwzorowanie ilorazowe,

3) $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.

Twierdzenie 3.3.3 (D. E. Alspach [1]). *Niech X będzie przestrzenią ilorazową przestrzeni c_0. Wtedy dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje podprzestrzeń Y przestrzeni c_0 taka, że $d(X, Y) < \ln(1+\epsilon)$.*

Lemat 3.3.4 (D. E. Alspach [2]). *Niech X będzie przestrzenią Banacha taką, że X^* jest ośrodkowa i niech Y będzie podprzestrzenią X^* izomorficzną z ℓ_1 i o znormalizowanej bazie, którą będziemy oznaczać przez (y_n^*). Jeżeli $\overline{\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}}^* \subset Y$, to Y jest słabo* domknięta w X^*.*

Lemat 3.3.5 (D. E. Alspach [2]). *Załóżmy, że X i Y są ośrodkowymi przestrzeniami Banacha, a (x_n^*) i (y_n^*) są znormalizowanymi ciągami odpowiednio w X^* i Y^*, równoważnymi standardowej bazie w ℓ_1 i dla których $\overline{\operatorname{lin}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}}^* = \overline{\operatorname{lin}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}}$ i $\overline{\operatorname{lin}\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}}^* = \overline{\operatorname{lin}\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}}$. Załóżmy, że ϕ działające z $\overline{\operatorname{lin}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}}$ na $\overline{\operatorname{lin}\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}}$ i będące odwzorowaniem przekształcającym bazę w bazę, tj. $\phi(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n^*) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n^*$, jest słabo* ciągłym homeomorfizmem z $\overline{\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}}^*$ na $\overline{\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}}^*$. Wtedy ϕ jest słabo* ciągłym izomorfizmem z $\overline{\operatorname{lin}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}}$ na $\overline{\operatorname{lin}\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}}$.*

Lemat 3.3.6 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, R. Popescu [21]). *Niech T będzie ograniczonym operatorem liniowym z X na Y, przy czym $Y \neq \{0\}$. Wtedy*

$$\sup\{\delta > 0 : \delta B_Y \subseteq T(B_X)\} = \|\widetilde{T}^{-1}\|^{-1},$$

gdzie $\widetilde{T}$ jest określone jak w Twierdzeniu 3.3.2.

Możemy teraz przejść do dowodu Twierdzenia 3.3.1.

Dowód Twierdzenia 3.3.1. Zauważmy, że jeżeli $r^*(X) = 0$, to $X = c_0$ (patrz [26]). Wobec tego przyjmijmy, że $r^*(X) > 0$. Niech $\varepsilon \in (0, r^*(X))$ będzie dowolnie wybrany. Istnieją $e^* \in (\operatorname{ext} B_{X^*})'$ i podciąg $(e_{n_k}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ standardowej bazy w ℓ_1 takie, że $\|e^*\| > r^*(X) - \frac{\varepsilon}{2}$, $e_{n_k}^* \xrightarrow{\sigma(\ell_1, X)} e^*$ i $\|e^*\| > \sum_{k=1}^{\infty} |e^*(n_k)|$. Połóżmy $e_{n_0}^* = \frac{e^* - \sum_{k=1}^{\infty} e^*(n_k) e_{n_k}^*}{\|e^*\| - \sum_{k=1}^{\infty} |e^*(n_k)|}$. Oczywiście $\|e_{n_0}^*\| = 1$ i ciąg $(e_{n_k}^*)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ jest równoważny standardowej bazie w ℓ_1. Niech $Y = \overline{\operatorname{lin}\{e_{n_0}^*, e_{n_1}^*, e_{n_2}^*, \dots\}}$. Ponieważ $\overline{\{e_{n_0}^*, e_{n_1}^*, e_{n_2}^*, \dots\}}^* = \{e_{n_0}^*, e_{n_1}^*, e_{n_2}^*, \dots\} \cup \{e^*\} \subset Y$, więc Lemat 3.3.4 zapewnia nam, że $\overline{Y}^* = Y$, a zatem $Y = (X/{}^{\perp}Y)^*$. Przyjmijmy, że

$$y^* = \left(\|e^*\| - \sum_{k=1}^{\infty} |e^*(n_k)|, e^*(n_1), e^*(n_2), e^*(n_3), \dots \right).$$

Ponieważ $y^* \in B_{\ell_1}$, więc z punktu (iii) w Twierdzeniu 1.0.4 wiemy, że $W^*_{y^*} = \ell_1$ oraz $e^*_n \xrightarrow{\sigma(\ell_1, W_{y^*})} y^*$. Niech $\phi : Y \to W^*_{y^*}$ będzie określone w następujący sposób:

$$\phi(a_1 e^*_{n_0} + a_2 e^*_{n_1} + a_3 e^*_{n_2} + a_4 e^*_{n_3} + \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^*_k.$$

Wtedy ϕ jest izometrią liniową "na". Ponadto

$$\begin{aligned}\phi(e^*) &= \phi\left(\left(\|e^*\| - \sum_{k=1}^{\infty} |e^*(n_k)|\right) e^*_{n_0} + \sum_{k=1}^{\infty} e^*(n_k) e^*_{n_k}\right) \\ &= \left(\|e^*\| - \sum_{k=1}^{\infty} |e^*(n_k)|\right) e^*_1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^*(n_k) e^*_{k+1} \\ &= \left(\|e^*\| - \sum_{k=1}^{\infty} |e^*(n_k)|, e^*(n_1), e^*(n_2), e^*(n_3), \dots\right) = y^*.\end{aligned}$$

Wobec tego ϕ jest słabo* ciągłym homeomorfizmem z $\overline{\{e^*_{n_0}, e^*_{n_1}, e^*_{n_2}, \dots\}}^* = \{e^*_{n_0}, e^*_{n_1}, e^*_{n_2}, \dots\} \cup \{e^*\}$ na $\overline{\{e^*_1, e^*_2, \dots\}}^* = \{e^*_1, e^*_2, \dots\} \cup \{y^*\}$. W świetle Lematu 3.3.5 ϕ jest słabo* ciągłą izometrią z Y na $\ell_1 = W^*_{y^*}$. Stąd W_{y^*} jest izometryczna z $X/^{\perp}Y$.

Załóżmy teraz, że $T : X \to c_0$ jest izomorfizmem. Bez straty na ogólności rozważań możemy przyjąć, że $\|T^{-1}\| = 1$. Rozważmy odwzorowanie $\pi T^{-1} : c_0 \to X/^{\perp}Y = W_{y^*}$, gdzie $\pi : X \to X/^{\perp}Y$ jest odwzorowaniem ilorazowym. Oczywiście πT^{-1} jest odwzorowaniem "na". Z Twierdzenia 3.3.2 istnieje izomorfizm $\widetilde{\pi T^{-1}} : c_0/\ker \pi T^{-1} \to W_{y^*}$ taki, że $\|\widetilde{\pi T^{-1}}\| = \|\pi T^{-1}\|$. Zauważmy teraz, że $\pi T^{-1}(B_{c_0}) \supseteq \frac{1}{\|T\|+\eta} B_{W_{y^*}}$ dla dowolnego $\eta > 0$. Zatem z Lematu 3.3.6 otrzymujemy $\|T\| \geqslant \|\left(\widetilde{\pi T^{-1}}\right)^{-1}\|$. Ponieważ $\|\pi T^{-1}\| \leqslant 1$, więc $\|\widetilde{\pi T^{-1}}\| \leqslant 1$.

Następnie zauważmy, że na mocy Twierdzenia 3.3.3, istnieje podprzestrzeń Z przestrzeni c_0 i izomorfizm $K : c_0/\ker \pi T^{-1} \to Z$ taki, że $\|K\|\|K^{-1}\| < 1 + \epsilon$. Wobec tego z Twierdzenia 3.2.1 dostajemy

$$1 + 2\|y^*\| \leqslant \|\widetilde{\pi T^{-1}} K^{-1}\| \|K \left(\widetilde{\pi T^{-1}}\right)^{-1}\| \leqslant \|K^{-1}\| \|\widetilde{\pi T^{-1}}\| \|K\| \| \left(\widetilde{\pi T^{-1}}\right)^{-1}\| \leqslant (1+\epsilon)\|T\|.$$

Stąd $\|T\| \geqslant \frac{1+2\|e^*\|}{1+\varepsilon} > \frac{1+2r^*(X)-\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Przechodząc do granicy przy $\varepsilon \to 0$, otrzymujemy

$$\|T\| \, \|T^{-1}\| \geqslant 1 + 2r^*(X).$$

□

Uwaga 3.3.7. Z dowodu Stwierdzenia 3.2.3 zamieszczonego w [21] wiemy, że $d(W_{e^*}, c_0) \leqslant \ln(1 + 2\|e^*\|)$. Dla autorów pracy [21] nie było jasne, czy to oszacowanie jest dokładne poza przypadkiem, gdy $\|e^*\| = 1$. Stosując Twierdzenie 3.3.1 lub Twierdzenie 3.2.1 natychmiast otrzymujemy, że $d(W_{e^*}, c_0) = \ln(1 + 2\|e^*\|)$ dla dowolnego $e^* \in B_{\ell_1}$.

ROZDZIAŁ 4

Przykłady zastosowań

Odległość Banacha-Mazura jest klasycznym pojęciem w analizie funkcjonalnej używanym do opisu stabilności geometrycznych własności przestrzeni Banacha. W rozdziale tym, w ramach zastosowań zaprezentowanych w poprzednim rozdziale wyników, skupimy się na zagadnieniu stabilności wielościenności i własności rozszerzania dla operatorów zwartych w obrębie przestrzeni Lindenstraussa oraz słabej* własności punktu stałego w obrębie pewnych klas ℓ_1-predualnych. Zajmiemy się również omówieniem pewnych topologicznych i metrycznych własności przestrzeni $(\mathcal{H}/_\sim, d_{\mathcal{H}/_\sim})$.

4.1 Stabilność wielościenności w obrębie L_1-predualnych

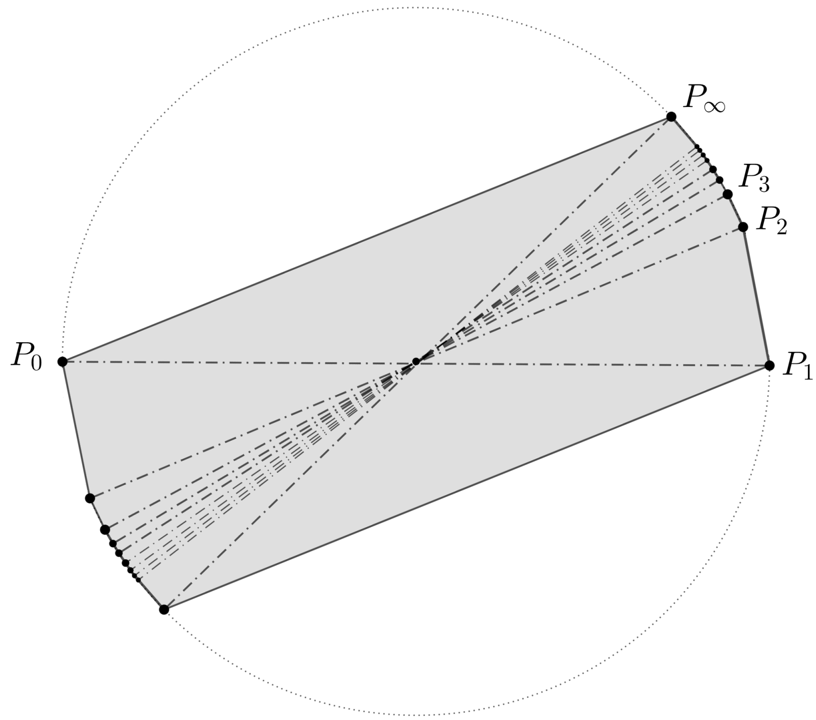
Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha X nazywamy *wielościenną* (*polihedralną*), jeśli domknięta kula jednostkowa dowolnej skończenie wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni X jest wielościanem (tzn. ma skończoną liczbę punktów ekstremalnych) (patrz [38]).

Klasycznym przykładem L_1-predualnej będącej przestrzenią wielościenną jest c_0 (patrz [38]). Z drugiej strony, jako przykład L_1-predualnej niebędącej przestrzenią wielościenną, możemy przywołać przestrzeń c. Przytoczymy elementarny dowód tego faktu. Z komentarza zamieszczonego w [32] wynika, że autorem tego rozumowania jest Libor Veselý.

Stwierdzenie 4.1.1. *Przestrzeń c nie jest przestrzenią wielościenną.*

Dowód. Rozważmy punkty P_n na płaszczyźnie, gdzie $P_n := e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{4}i}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ (patrz Rysunek 4.1). Niech $a_n x + b_n y = 1$ będzie równaniem prostej przechodzącej przez P_n i P_{n+1} dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $a_0 x + b_0 y = 1$ będzie równaniem prostej przechodzącej przez $P_\infty := e^{i\frac{\pi}{4}}$ i $P_0 := (-1, 0)$. Wtedy ciągi $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ i $b = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ należą do c, a ich otoczka liniowa jest izometryczna z płaszczyzną wyposażoną w normę, której domknięta kula jednostkowa jest zbiorem $\overline{\operatorname{conv}\{\pm P_1, \pm P_2, \dots, \pm P_\infty\}}$. □

Należy również przypomnieć, że jeżeli X jest przestrzenią Banacha taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $r \in (0, 1)$, to X jest przestrzenią wielościenną (patrz [28]).



Rysunek 4.1: Konstrukcja pokazująca, że c nie jest przestrzenią wielościenną.

Przywołamy teraz kluczową w dalszej części rozprawy charakteryzację wielościennych przestrzeni Lindenstraussa.

Twierdzenie 4.1.2 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, L. Veselý [23])**.** *Niech X będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Lindenstraussa. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

1. *X jest przestrzenią wielościenną.*
2. *X nie zawiera izometrycznej kopii przestrzeni c.*

Stąd, jako natychmiastową konsekwencję Twierdzenia 3.1.3, otrzymujemy:

Wniosek 4.1.3 (A. Gergont, Ł. Piasecki [29])**.** *Niech X będzie nieskończenie wymiarową L_1-predualną taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$. Jeżeli Y jest L_1-predualną izomorficzną z X i*

$$d(X,Y) < \ln \frac{3-r}{1+r},$$

to Y jest przestrzenią wielościenną.

Uwaga 4.1.4. Należy zaznaczyć, że badanie stabilności wielościenności w obrębie wszystkich przestrzeni Banacha byłoby bezprzedmiotowe. Mianowicie dla każdej wielościennej przestrzeni Banacha X i dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy wskazać taką przestrzeń Banacha Y, która nie jest wielościenna i $d(X,Y) \leqslant \ln(1+\varepsilon)$.

Trzeba podkreślić, że oszacowanie uzyskane we Wniosku 4.1.3 jest dokładne dla dowolnego $r \in [0,1)$ (patrz Przykład 3.1.9). W przypadku, gdy $r = 1$ możemy wskazać taką wielościenną ℓ_1-predualną X, dla której $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset S_{X^*}$ i istnieje prawie izometryczna z nią ℓ_1-predualna, która nie jest wielościenna. W tym celu wykorzystamy wynik charakteryzujący ℓ_1-predualne hiperpłaszczyzny w c zawierające izometryczną kopię przestrzeni c.

Stwierdzenie 4.1.5 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki [19]). *Niech $e^* \in B_{\ell_1}$. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

1. *W_{e^*} zawiera podprzestrzeń izometryczną z c.*
2. *$\|e^*\| = 1$, zbiór $\{n \in \mathbb{N} : e^*(n) < 0\}$ jest skończony i zbiór $\{n \in \mathbb{N} : e^*(n) = 0\}$ jest nieskończony.*

Przykład 4.1.6. Ze względu na fakt, iż przykład ten będziemy przywoływać również w kontekście innych niż wielościenność własności, rozważmy następujący przekrój ℓ_1-predualnych hiperpłaszczyzn w c: $W_{x_1^*}, W_{x_2^*}, W_{x_3^*}$ i $W_{x_4^*}$, gdzie $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^* \in S_{\ell_1}$ są następującej postaci $x_1^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots\right)$, $x_2^* = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, -\frac{1}{2^4}, \dots\right)$, $x_3^* = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2^2}, 0, \frac{1}{2^3}, 0, \frac{1}{2^4}, 0, \dots\right)$ i $x_4^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, -\frac{1}{2^4}, \dots\right)$. Zauważmy, że $p(x_i^*, x_j^*) = 0$ dla $i, j = 1,2,3,4$. Wobec tego w świetle Stwierdzenia 2.2.1, $d(W_{x_i^*}, W_{x_j^*}) = 0$ dla $i, j = 1,2,3,4$. Z drugiej strony, ze Stwierdzenia 2.2.2 wynika, że $W_{x_i^*}$ nie jest izometryczna z $W_{x_j^*}$ dla $i \neq j$. Na mocy Stwierdzenia 4.1.5, $W_{x_3^*}$ zawiera podprzestrzeń izometryczną z c, w przeciwieństwie do $W_{x_1^*}$, $W_{x_2^*}$ i $W_{x_4^*}$. W konsekwencji z Twierdzenia 4.1.2, $W_{x_1^*}$, $W_{x_2^*}$ i $W_{x_4^*}$ są wielościenne, natomiast $W_{x_3^*}$ nie jest przestrzenią wielościenną. Wobec tego widać wyraźnie, że wielościenność nie jest niezmiennicza względem odległości Banacha-Mazura 0.

4.2 Stabilność własności rozszerzania dla operatorów zwartych

Jedną z inspiracji rozwoju teorii rozszerzania operatorów było niewątpliwie słynne twierdzenie Hahna-Banacha.

Twierdzenie 4.2.1 (H. Hahn [34], S. Banach [5]). *Niech Y będzie podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X. Wówczas każdy ciągły funkcjonał liniowy f na Y można rozszerzyć do ciągłego funkcjonału liniowego F na X tak, by $\|F\| = \|f\|$.*

Idea rozszerzania funkcjonałów z podprzestrzeni na całą przestrzeń z zachowaniem pewnych szczególnych własności, została przeniesiona później na inne typy przestrzeni czy odwzorowań. Z tematyką tą związana jest własność, która dotyczy rozszerzania operatorów zwartych z zachowaniem normy. Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma *własność rozszerzania dla operatorów zwartych* (w skrócie WROZ), jeśli dla dowolnych przestrzeni Banacha $Y \subset Z$, każdy operator zwarty $T : Y \to X$ dopuszcza zwarte rozszerzenie $\widetilde{T} : Z \to X$ takie, że $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Własność ta była obszernie studiowana przez J. Lindenstraussa [45]. Między innymi wykazał on, że każda przestrzeń Banacha X mająca WROZ musi być wielościenną L_1-predualną. Przez niemal 50 lat sądzono, że zachodzi również zależność w drugą stronę. Co więcej, brak własności rozszerzania dla operatorów zwartych przestrzeni Lindenstraussa utożsamiano z faktem iż przestrzeń ta zawiera izometryczną kopię przestrzeni c (patrz [41],

[27, Stwierdzenie 6.23]). W pracy [23] wykazano, że oba te stwierdzenia są fałszywe (patrz Przykłady 4.1.6 i 4.2.9). Ponadto w [23] oraz [22] scharakteryzowano na nowo przestrzenie Lindenstraussa mające WROZ (patrz Twierdzenie 4.2.3). W naszych dalszych rozważaniach podamy kolejną charakteryzację przestrzeni Banacha mających WROZ. Zanim jednak przejdziemy do jej treści, przypomnimy pewne istotne pojęcia i przytoczymy kluczowe dla jej dowodu wyniki.

Wypukły podzbiór F kuli B_X (odpowiednio sfery S_X) nazywamy *fejsem* (*obliczem*) kuli B_X (odpowiednio sfery S_X), jeżeli z warunku $tx + (1-t)y \in F$ dla $x, y \in B_X$ (odpowiednio $x, y \in S_X$) i $t \in (0,1)$ otrzymujemy $x, y \in F$. Fejs kuli B_X nazywamy *właściwym*, jeśli $F \neq B_X$. Zatem F jest fejsem sfery S_X wtedy i tylko wtedy, gdy F jest właściwym fejsem kuli B_X.

Niech K będzie zwartym, wypukłym, symetrycznym względem 0 podzbiorem przestrzeni liniowo-topologicznej. Przez $A_0(K)$ będziemy oznaczać przestrzeń Banacha wszystkich funkcji $f : K \to \mathbb{R}$ ciągłych, afinicznych i symetrycznych (tzn. takich, że $f(-x) = -f(x)$ dla każdego $x \in K$), wyposażoną w normę supremum.

Stwierdzenie 4.2.2 (A. J. Lazar [41])**.** *Niech X będzie L_1-predualną, F fejsem sfery S_{X^*}, H słabo* domkniętą otoczką wypukłą zbioru $F \cup -F$, a Y ośrodkową podprzestrzenią przestrzeni $A_0(H)$. Wtedy istnieje liniowa izometria $T : Y \to X$ taka, że $x^*(T(y)) = y(x^*)$ dla wszystkich $x^* \in H$ i $y \in Y$.*

Twierdzenie 4.2.3 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, R. Popescu, L. Veselý [23, 22])**.** *Niech X będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

1. *X ma WROZ.*
2. *X jest przestrzenią Lindenstraussa taką, że B_{X^*} nie ma właściwego, nieskończenie wymiarowego, słabo* domkniętego fejsu.*
3. *X jest przestrzenią Lindenstraussa taką, że $x^*(x) < 1$ ilekroć $x \in S_X$ i $x^* \in (\operatorname{ext} B_{X^*})'$.*
4. *X jest przestrzenią Lindenstraussa taką, że zbiór $\operatorname{ext} D(x)$ jest skończony dla każdego $x \in S_X$.*

Twierdzenie 4.2.4 (M. Zippin [62])**.** *Niech X będzie nieskończenie wymiarową ośrodkową L_1-predualną. Wtedy istnieje podprzestrzeń $U \subset X$ i izometria $T : U \to c$ taka, że obraz $Y = T(U)$ jest albo przestrzenią c albo domkniętą hiperpłaszczyzną w c. Ponadto, jeżeli B_X ma punkt ekstremalny, to Y zawiera element $(1, 1, 1, \dots)$ z przestrzeni c.*

Uwaga 4.2.5. Z dowodu Twierdzenia 4.2.4 wynika, że przestrzeń Y jest ℓ_1-predualną.

Wykażemy teraz nową, istotną w toku dalszych rozważań charakteryzację L_1-predualnych mających WROZ. Należy podkreślić, że omawiana wcześniej klasa przestrzeni $A(S)$, jak również klasa $\mathcal{H}$ odegrają tutaj kluczową rolę. Wynik ten zamyka dyskusję na temat opisu wewnętrznej struktury przestrzeni Lindenstraussa mającej WROZ.

Twierdzenie 4.2.6 (A. Gergont, Ł. Piasecki [29])**.** *Niech X będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

1. *X ma WROZ.*

2. $X^* = \ell_1(\Gamma)$ *dla pewnego zbioru* Γ *i* X *nie zawiera izometrycznej kopii żadnej nieskończenie wymiarowej przestrzeni* $A(S)$.

3. $X^* = \ell_1(\Gamma)$ *dla pewnego zbioru* Γ *i* X *nie zawiera izometrycznej kopii żadnej hiperpłaszczyzny* $W_{e^*} \in \mathcal{H}$ *zawierającej element* $(1, 1, 1, \dots)$ *z przestrzeni* c.

4. $X^* = \ell_1(\Gamma)$ *dla pewnego zbioru* Γ *i* X *nie zawiera izometrycznej kopii żadnej domkniętej hiperpłaszczyzny w* c *zawierającej element* $(1, 1, 1, \dots)$ *z przestrzeni* c.

Dowód. Jak już wcześniej wspomnieliśmy, Lindenstrauss [45] wykazał, że każda przestrzeń Banacha mająca WROZ musi być wielościenną L_1-predualną. Zatem stosując Twierdzenie 3.1.1 i Twierdzenie 3.1.2 otrzymujemy, że $X^* = \ell_1(\Gamma)$ dla pewnego zbioru Γ.

$\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$. Załóżmy, że $X^* = \ell_1(\Gamma)$ dla pewnego zbioru Γ i X nie ma WROZ. Wówczas, na mocy Twierdzenia 4.2.3, B_{X^*} ma nieskończenie wymiarowy, słabo* domknięty właściwy fejs F. Wobec tego istnieje nieskończony zbiór $\Lambda \subset \Gamma$ taki, że

$$F = \overline{\operatorname{conv}\{\epsilon_\lambda e_\lambda^* : \lambda \in \Lambda\}} = \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \epsilon_\lambda e_\lambda^* : \alpha_\lambda \geqslant 0, \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda = 1 \right\},$$

gdzie dla każdego $\lambda \in \Lambda$ mamy jedną z dwóch możliwości: $\epsilon_\lambda = 1$ lub $\epsilon_\lambda = -1$. Niech $Y_1 = \operatorname{lin}\operatorname{conv}(F \cup -F)$. Oczywiście, przestrzeń Y_1 jest izometryczna z przestrzenią $\ell_1(\Lambda)$. Ponieważ $B_{Y_1} = B_{X^*} \cap Y_1 = \operatorname{conv}(F \cup -F)$, więc Y_1 jest słabo* domkniętą podprzestrzenią przestrzeni X^* (patrz rozdział V, [25]). Stąd $Y_1 = (X/^{\perp}Y_1)^*$. Przestrzeń $X/^{\perp}Y_1$ możemy utożsamiać z przestrzenią $A_0(B_{Y_1})$. Niech $f : F \to \mathbb{R}$ będzie funkcją stałą, równą 1 na F. Niech $\tilde{f}$ oznacza jedyne afiniczne, symetryczne rozszerzenie f na B_{Y_1}, a następnie niech $\tilde{\tilde{f}}$ oznacza jedyne rozszerzenie liniowe $\tilde{f}$ na całą przestrzeń Y_1. Zauważmy, że

$$\ker \tilde{\tilde{f}} \cap B_{Y_1} = \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}(-F).$$

To pokazuje, że $\ker\tilde{\tilde{f}}$ jest słabo* domknięte w Y_1, a więc $\tilde{\tilde{f}} \in Y_1^*$ (patrz rozdział V, [25]). Wobec tego $\tilde{f}$ jest punktem ekstremalnym domkniętej kuli jednostkowej w $A_0(B_{Y_1})$. Niech Z będzie nieskończenie wymiarową, ośrodkową podprzestrzenią przestrzeni $A_0(B_{Y_1})$ zawierającą punkt ekstremalny $\tilde{f}$. Z Lematu 3.1.6 wynika, że przestrzeń $A_0(B_{Y_1})$ zawiera ośrodkową podprzestrzeń Z_1 taką, że $Z \subset Z_1 \subset A_0(B_{Y_1})$ i Z_1 jest L_1-predualną. Ponieważ $\tilde{f} \in \operatorname{ext} B_{Z_1}$, więc z Twierdzenia 1.0.2 wynika, że Z_1 jest izometryczna z pewną nieskończenie wymiarową przestrzenią $A(S)$. Wobec Stwierdzenia 4.2.2, istnieje liniowa izometria $T : A(S) \to X$.

$\neg(2) \Rightarrow \neg(3)$. Załóżmy, że $X^* = \ell_1(\Gamma)$ dla pewnego zbioru Γ i X zawiera podprzestrzeń izometryczną z pewną nieskończenie wymiarową przestrzenią $A(S)$. Ponownie stosując Lemat 3.1.6 wnioskujemy, że przestrzeń $A(S)$ zawiera nieskończenie wymiarową ośrodkową L_1-predualną, która zawiera punkt ekstremalny kuli $B_{A(S)}$. Z dowodu Twierdzenia 4.2.4 (patrz Uwaga 4.2.5) wynika, że przestrzeń $A(S)$ zawiera izometryczną kopię hiperpłaszczyzny $W_{e^*} \in \mathcal{H}$ zawierającej element $(1, 1, 1, \dots) \in c$.

$\neg(3) \Rightarrow \neg(4)$. Oczywiste.

$\neg(4) \Rightarrow \neg(1)$. Załóżmy, że $X^* = \ell_1(\Gamma)$ i X zawiera izometryczną kopię domkniętej hiperpłaszczyzny W w przestrzeni c zawierającej element $x = (1, 1, 1, \dots) \in c$. Ponieważ W jest domkniętą hiperpłaszczyzną, więc może być zapisana jako

$$W = \left\{ x = (x(1), x(2), \dots) \in c : g(1) \lim_{i\to\infty} x(i) + \sum_{i=1}^{\infty} g(i+1)x(i) = 0 \right\},$$

gdzie $g = (g(1), g(2), \dots) \in S_{\ell_1}$. Ponieważ $\lim_{i\to\infty} g(i) = 0$, więc możemy wybrać podciągi liczb naturalnych $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i ciąg liczb rzeczywistych $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ takie, że:

- $p_i < q_i < p_{i+1} < q_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$;
- $\eta_i \in (-1, 1)$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$;
- dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$ takich, że $j \neq i$ element

  $$x_{i,j} = \eta_i e_{p_i} + e_{q_i} - \eta_j e_{p_j} - e_{q_j}$$

  należy do W (przypomnijmy, że $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) \in c$, gdzie 1 występuje na n-tym miejscu).

Niech (e_n^*) oznacza standardową bazę w $c^* = \ell_1$. Niech u_n^* oznacza zawężenie e_n^* do W. Ponieważ element $x = (1, 1, 1, \dots) \in W$, więc $\|u_n^*\| = u_n^*(x) = e_n^*(x) = 1$. Niech $\widetilde{u_n^*}$ oznacza rozszerzenie u_n^* na całą przestrzeń X z zachowaniem normy, $\|\widetilde{u_n^*}\| = 1$. Wtedy $\widetilde{u_n^*} \in D(x)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $\|x_{i,j}\| = 1$ dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$ takich, że $j \neq i$, więc

$$2 \geqslant \left\| \widetilde{u_{q_i+1}^*} - \widetilde{u_{q_j+1}^*} \right\| \geqslant \left| \widetilde{u_{q_i+1}^*}(x_{i,j}) - \widetilde{u_{q_j+1}^*}(x_{i,j}) \right| = \left| e_{q_i+1}^*(x_{i,j}) - e_{q_j+1}^*(x_{i,j}) \right| = 2.$$

To pokazuje, że $D(x)$ nie jest normowo zwarty, a więc $D(x)$ jest nieskończenie wymiarowym słabo* domkniętym, właściwym fejsem kuli B_{X^*}. Z Twierdzenia 4.2.3 wynika, że przestrzeń X nie ma WROZ. □

Uwaga 4.2.7. Z punktu (i) Twierdzenia 1.0.4 możemy wywnioskować że nie każda hiperpłaszczyzna w c zawierająca element $(1, 1, 1, \dots) \in c$ jest ℓ_1-predualną. Jako przykład możemy podać W_{e^*} z $e^* = (1, -1, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

Możemy teraz wykazać następujący wynik stabilnościowy dotyczący WROZ.

Twierdzenie 4.2.8 (A. Gergont, Ł. Piasecki [29])**.** *Niech X będzie nieskończenie wymiarową L_1-predualną taką, że $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$. Jeżeli Y jest L_1-predualną izomorficzną z X i*

$$d(X, Y) < \ln \frac{3-r}{1+r},$$

to Y ma WROZ.

Dowód. Z Twierdzeń 3.1.1, 3.1.2 i 4.2.3, $X^* = \ell_1(\Gamma)$ dla pewnego zbioru Γ i X ma WROZ. Niech Y będzie L_1-predualną izomorficzną z X. Wtedy $Y^* = \ell_1(\Gamma)$. Załóżmy, że Y nie ma WROZ. Wówczas, na mocy Twierdzenia 4.2.6, Y zawiera izometryczną kopię nieskończenie wymiarowej przestrzeni $A(S)$. Z Wniosku 3.1.8 otrzymujemy, że $d(X, Y) \geqslant \ln \frac{3-r}{1+r}$. □

Oszacowanie uzyskane w Twierdzeniu 4.2.8 jest dokładne dla każdego $r \in [0,1)$ (patrz Przykład 3.1.9). Dla kompletności rozważań warto wspomnieć, że możemy znaleźć taką ℓ_1-predualną X mającą WROZ, dla której $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset S_{X^*}$ i istnieje taka ℓ_1-predualna Y, że $d(X,Y)=0$ i Y nie ma WROZ.

Przykład 4.2.9. Wróćmy do ℓ_1-predualnych hiperpłaszczyzn $W_{x_1^*}, W_{x_2^*}, W_{x_3^*}$ i $W_{x_4^*}$ omawianych w Przykładzie 4.1.6. Z Twierdzenia 4.2.3 wynika, że $W_{x_2^*}$ i $W_{x_4^*}$ mają WROZ, w przeciwieństwie do $W_{x_1^*}$ i $W_{x_3^*}$. Wobec tego własność rozszerzania dla operatorów zwartych nie jest niezmiennicza względem odległości Banacha-Mazura 0.

Ponieważ $W_{x_2^*}$ i $W_{x_4^*}$ mają WROZ, więc możemy od razu wywnioskować, że są wielościenne (por. Przykład 4.1.6). Jednakże z faktu, że przestrzeń nie ma WROZ, nie wynika, że nie jest ona również wielościenną. Przykładem przestrzeni wielościennej, która nie ma WROZ jest $W_{x_1^*}$ (patrz Przykład 4.1.6). Należy podkreślić, że fakt ten został po raz pierwszy wykazany w [23].

4.3 Topologiczne i metryczne własności przestrzeni $(\mathcal{H}/_\sim, d_{\mathcal{H}/_\sim})$

Niech (M,ρ) będzie przestrzenią metryczną. Symbolem $B_M(x,r)$ oznaczamy *domkniętą kulę* o środku w punkcie $x \in M$ i promieniu $r>0$:

$$B_M(x,r) = \{y \in M : \rho(x,y) \leqslant r\}.$$

Przez $S_M(x,r)$ oznaczamy *sferę* o środku w punkcie $x \in M$ i promieniu $r>0$:

$$S_M(x,r) = \{y \in M : \rho(x,y) = r\}.$$

Ponadto połóżmy $B_M(x,0)=\{x\}$ i $S_M(x,0)=\{x\}$.

Niech $x,y \in M$. Załóżmy, że istnieje ciągłe odwzorowanie $\gamma : [0,1] \to M$ takie, że $\gamma(0)=x$ i $\gamma(1)=y$. Odwzorowanie to nazywamy *krzywą* (lub *ścieżką*) łączącą x i y. *Długość* krzywej definiujemy jako

$$L(\gamma) = \sup \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(\gamma\left(t_{k+1}\right), \gamma\left(t_k\right)\right),$$

gdzie kres górny jest wzięty po wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i wszystkich możliwych podziałach $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$. Jeżeli przestrzeń M jest taka, że każde dwa punkty z M można połączyć co najmniej jedną krzywą o skończonej długości, to możemy skonstruować w M *metrykę ścieżkową*, zdefiniowaną dla dowolnych $x,y \in M$ przez

$$\rho_M^{\text{path}}(x,y) = \text{kres dolny długości wszystkich krzywych w } M \text{ łączących } x \text{ i } y.$$

4.3.1 Homeomorficzny model przestrzeni $(\mathcal{H}/_\sim, d_{\mathcal{H}/_\sim})$

W tym paragrafie skupimy się na udowodnieniu wyniku, który daje nam prosty i niezwykle użyteczny w kontekście badań własności topologicznych model przestrzeni $(\mathcal{H}/_\sim, d_{\mathcal{H}/_\sim})$ wprowadzonej w podrozdziale 2.2. Zacznijmy od jego sformułowania.

Twierdzenie 4.3.1 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30]). *Przestrzeń $(\mathcal{H}/_\sim, d_{\mathcal{H}/_\sim})$ jest homeomorficzna z przestrzenią (K, d_{ℓ_1}), gdzie*

$$K = \{x = (x(1), x(2), \dots) \in B_{\ell_1} : x(i) \geqslant x(i+1) \geqslant 0 \text{ dla wszystkich } i \in \mathbb{N}\}$$

i $d_{\ell_1}(x, y) = \|x - y\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i) - y(i)|$ dla dowolnych $x, y \in K$.

W celu udowodnienia przytoczonego twierdzenia potrzebujemy szeregu następujących wyników pomocniczych.

Lemat 4.3.2 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30]). *Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech a_i, b_i, $i = 1, \dots, n$, będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_n \geqslant 0$ i $b_1 \geqslant \dots \geqslant b_n \geqslant 0$. Wtedy dla dowolnej permutacji $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_{\pi(i)}| \geqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| .$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy za pomocą indukcji względem n. Oczywiście dla $n = 1$ nierówność jest prawdziwa. Załóżmy, że nierówność zachodzi, gdy $n = k$ dla pewnego $k \geqslant 1$, tj. dla dowolnych liczb rzeczywistych a_i, b_i, $i = 1, \dots, k$, takich, że $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_k \geqslant 0$, $b_1 \geqslant \dots \geqslant b_k \geqslant 0$ i dla dowolnej permutacji $\pi : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i - b_{\pi(i)}| \geqslant \sum_{i=1}^{k} |a_i - b_i| .$$

Musimy pokazać, że nierówność zachodzi dla $n = k+1$. Rozważmy dowolne liczby rzeczywiste a_i, b_i, $i = 1, \dots, k+1$ takie, że $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_{k+1} \geqslant 0$ i $b_1 \geqslant \dots \geqslant b_{k+1} \geqslant 0$ oraz dowolną permutację $\pi : \{1, \dots, k+1\} \to \{1, \dots, k+1\}$. Jeżeli istnieje $1 \leqslant i_0 \leqslant k+1$ taki, że $i_0 = \pi(i_0)$, to wykorzystując założenie indukcyjne łatwo otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{k+1} |a_i - b_{\pi(i)}| \geqslant \sum_{i=1}^{k+1} |a_i - b_i|.$$

Z drugiej strony, jeżeli $i \neq \pi(i)$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k+1$, to $\pi(1) > 1$ i istnieje $1 < j \leqslant k+1$ taki, że $\pi(j) = 1$. Bez straty na ogólności rozważań możemy założyć, że $a_1 \geqslant b_1$. Wtedy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} |a_i - b_{\pi(i)}| &= |a_1 - b_1| + |b_1 - b_{\pi(1)}| + |a_j - b_1| + \sum_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{k+1} |a_i - b_{\pi(i)}| \\ &\geqslant |a_1 - b_1| + |a_j - b_{\pi(1)}| + \sum_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{k+1} |a_i - b_{\pi(i)}| \geqslant \sum_{i=1}^{k+1} |a_i - b_i|\end{aligned}$$

i ostatnia nierówność wynika z naszego założenia indukcyjnego. □

Lemat 4.3.3 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30]). *Dla dowolnych x, $y \in K$,*

$$p(x, y) = \|x - y\| .$$

Dowód. Niech $x, y \in K, \pi \in \Pi$ i $\epsilon \in \mathcal{E}$ będą dowolnie wybrane. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ połóżmy $x^{(n)} = (x(1), \dots, x(n), 0, 0, \dots)$, $y^{(n)} = (y(1), \dots, y(n), 0, 0, \dots)$ i

$$A_n = \{i \in \{1, \dots, n\} : \pi(i) \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Niech $\pi_n \in \Pi$ będzie dowolną permutacją spełniającą warunki:

1. $\pi_n(\{1, \dots, n\}) = \{1, \dots, n\}$,
2. $\pi_n(i) = \pi(i)$ dla każdego $i \in A_n$.

Mamy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} |x^{(n)}(i) - \epsilon(i) y^{(n)}(\pi(i))| &\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x^{(n)}(i) - y^{(n)}(\pi(i))| \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x^{(n)}(i) - y^{(n)}(\pi_n(i))| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x^{(n)}(i) - y^{(n)}(\pi_n(i))|\end{aligned}$$

i z Lematu 4.3.2

$$\sum_{i=1}^{n} |x^{(n)}(i) - y^{(n)}(\pi_n(i))| \geqslant \sum_{i=1}^{n} |x^{(n)}(i) - y^{(n)}(i)| = \|x^{(n)} - y^{(n)}\|.$$

Powyższe rozumowanie pokazuje, że $p(x^{(n)}, y^{(n)}) \geqslant \|x^{(n)} - y^{(n)}\|$. Stąd i z (IV) otrzymujemy $p(x^{(n)}, y^{(n)}) = \|x^{(n)} - y^{(n)}\|$. Oczywiście

$$\lim_{n \to \infty} \|x^{(n)} - x\| = \lim_{n \to \infty} \|y^{(n)} - y\| = 0.$$

Stosując (IV) otrzymujemy

$$\lim_{n \to \infty} p(x^{(n)}, x) = \lim_{n \to \infty} p(y^{(n)}, y) = 0.$$

W związku z tym, stosując dwukrotnie (II) i (III), otrzymujemy

$$\lim_{n \to \infty} p(x^{(n)}, y^{(n)}) = p(x, y).$$

Zatem

$$p(x, y) = \lim_{n \to \infty} p(x^{(n)}, y^{(n)}) = \lim_{n \to \infty} \|x^{(n)} - y^{(n)}\| = \|x - y\|.$$

□

Kolejny wynik został wraz z pełnym dowodem (ze względu na sugestię recenzenta pracy [30]) po raz pierwszy opublikowany w [30], jednakże był już wcześniej znany i stosowany w dowodzie Lematu 2.3 w pracy [56].

Lemat 4.3.4 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30])**.** *Ustalmy $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, gdzie ε_0 jest jedynym rozwiązaniem rzeczywistym równania $t^3+4t^2+7t-2 = 0$ (tj. $\varepsilon_0 = 0,248\dots$). Jeżeli $\phi : \ell_1 \to \ell_1$ jest izomorfizmem takim, że dla każdego $x \in \ell_1$*

$$\|x\| \leqslant \|\phi(x)\| \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|,$$

to istnieje jednoznacznie wyznaczony ciąg znaków $\epsilon = (\epsilon(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $\epsilon(n) = \pm 1$, dokładnie jedna permutacja $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i dokładnie jeden ciąg $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w kuli $\frac{\varepsilon(4+\varepsilon)}{2-\varepsilon} B_{\ell_1}$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\phi(e_n^*) = \epsilon(n) e_{\pi(n)}^* + w_n.$$

Stwierdzenie 4.3.5 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30]). *Niech $x_m^*, x^* \in B_{\ell_1}$, $m \in \mathbb{N}$. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

(1) $\lim_{m\to\infty} d(W_{x_m^*}, W_{x^*}) = 0.$

(2) $\lim_{m\to\infty} p(x_m^*, x^*) = 0.$

Dowód. Załóżmy, że $\lim_{m\to\infty} d(W_{x_m^*}, W_{x^*}) = 0$. Wtedy istnieje ciąg izomorfizmów $\phi_m : W_{x_m^*} \to W_{x^*}$ taki, że $\lim_{m\to\infty} \|\phi_m\| \, \|\phi_m^{-1}\| = 1$. Możemy założyć, że $\|\phi_m^{-1}\| = 1$ (w przeciwnym razie możemy zastąpić ϕ_m przez $\|\phi_m^{-1}\| \, \phi_m$). Rozważmy teraz ciąg sprzężonych izomorfizmów $\phi_m^* : W_{x^*}^* \to W_{x_m^*}^*$. Z lematu 4.3.4 istnieje ciąg zbieżny do zera $(\eta_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ taki, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$

$$\phi_m^*(e_n^*) = \epsilon_m(n) e_{\pi_m(n)}^* + w_{m,n}^*,$$

gdzie $\pi_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest permutacją, $\epsilon_m = (\epsilon_m(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem znaków i $\|w_{m,n}^*\| < \eta_m$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Bez straty na ogólności rozważań możemy założyć, że

$$\epsilon_m(n) e_{\pi_m(n)}^* \xrightarrow{\sigma(\ell_1, W_{x_m^*})} x_m^*.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} p(x_m^*, x^*) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_m^*(n) - \epsilon_m(\pi_m^{-1}(n)) x^*(\pi_m^{-1}(n))| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_m^*(n) - (\phi_m^*(x^*))(n)| + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |w_{m,j}^*(n)||x^*(j)| \\ &\leqslant \|x_m^* - \phi_m^*(x^*)\| + \eta_m \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|\epsilon_m(n) e_{\pi_m(n)}^* - \phi_m^*(e_n^*)\| + \eta_m \leqslant 2\eta_m. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy przy $m \to \infty$, kończymy dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2).

Załóżmy teraz, że $\lim_{m\to\infty} p(x_m^*, x^*) = 0$. Możemy wybrać ciąg $(y_m^*)_{m\in\mathbb{N}}$ taki, że $y_m^* \in \widetilde{\mathcal{F}_{x_m^*}}$ oraz $\lim_{m\to\infty} \|y_m^* - x^*\| = 0$. Stosując Lemat 3.2.2 otrzymujemy $\lim_{m\to\infty} d(W_{y_m^*}, W_{x^*}) = 0$. Na mocy Stwierdzenia 2.2.1, $d(W_{y_m^*}, W_{x_m^*}) = 0$. Zatem $\lim_{m\to\infty} d(W_{x_m^*}, W_{x^*}) = 0$. □

Możemy teraz przejść do dowodu głównego wyniku tej sekcji.

Dowód Twierdzenia 4.3.1. Ustalmy $x^* \in B_{\ell_1}$. Zauważmy, że z konstrukcji (2.1), dla dowolnego $x^* \in B_{\ell_1}$ mamy

$$\widetilde{\mathcal{F}_{x^*}} \cap K = \{\overline{x^*}\}. \tag{4.1}$$

Niech $\phi : \mathcal{H}/_{\sim} \to K$ będzie dane wzorem

$$\phi([W_{x^*}]) = \overline{x^*}.$$

Zauważmy, że ze Stwierdzenia 2.2.1, (I) i (4.1) wynika, że wartość $\phi([W_{x^*}])$ nie zależy od wyboru reprezentanta warstwy $[W_{x^*}]$ i ϕ jest bijekcją. Pokażemy, że ϕ jest ciągłe. Niech $x_n^*, x^* \in B_{\ell_1}$ będą takie, że

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathcal{H}/\sim}([W_{x_n^*}], [W_{x^*}]) = \lim_{n\to\infty} d(W_{x_n^*}, W_{x^*}) = 0.$$

W świetle Stwierdzenia 4.3.5 i (V),

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n^*, x^*) = \lim_{n\to\infty} p(\overline{x_n^*}, \overline{x^*}) = 0,$$

co, z Lematu 4.3.3, jest równoważne z $\lim_{n\to\infty} \|\overline{x_n^*} - \overline{x^*}\| = 0$. To pokazuje, że ϕ jest ciągłe.

Z drugiej strony, niech $x_n^*, x^* \in K$ będą takie, że $\lim_{n\to\infty} \|x_n^* - x^*\| = 0$. Z Lematu 3.2.2 wynika, że $\lim_{n\to\infty} d_{\mathcal{H}/\sim}([W_{x_n^*}], [W_{x^*}]) = \lim_{n\to\infty} d(W_{x_n^*}, W_{x^*}) = 0$, a więc ϕ^{-1} jest ciągłe. □

Wniosek 4.3.6 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30])**.** *Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ przyjmijmy, że*

$$K_n = \{x \in B_{\ell_1} : x(1) \geqslant \cdots \geqslant x(n) \geqslant 0 \text{ i } x(n+k) = 0 \text{ dla wszystkich } k \in \mathbb{N}\},$$

natomiast

$$\mathcal{H}_n = \{W_{x^*} : x^* \text{ ma co najwyżej } n \text{ niezerowych współrzędnych}\}.$$

Zbiór K_2 jest przedstawiony na Rysunku 4.2. Niech $\sim$ oznacza relację równoważności na $\mathcal{H}_n$ określoną dla dowolnych W_{x^*}, $W_{y^*} \in \mathcal{H}_n$ w następujący sposób:

$$W_{x^*} \sim W_{y^*} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } d(W_{x^*}, W_{y^*}) = 0.$$

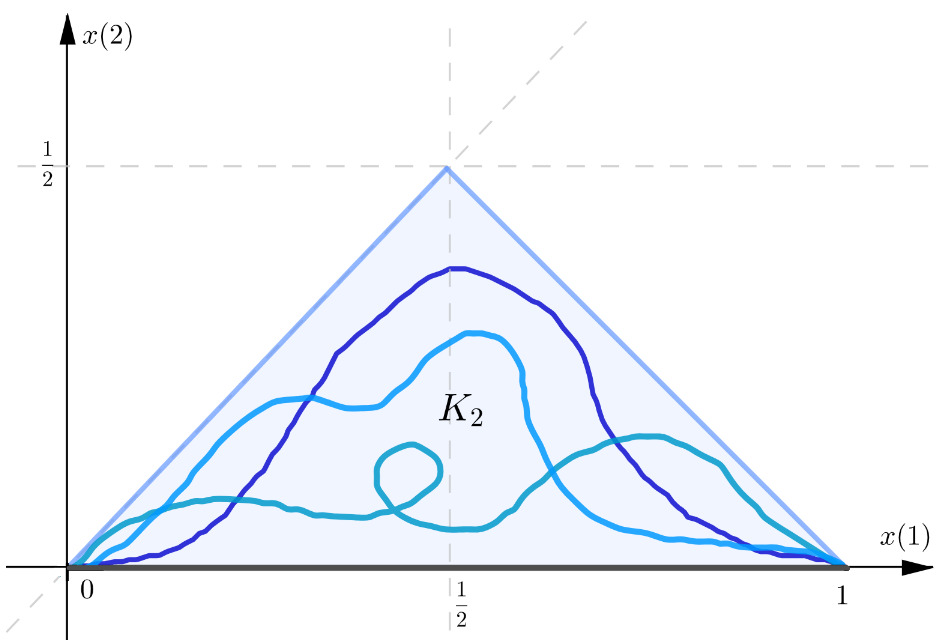
Następnie, niech $d_{\mathcal{H}_n/\sim} : \mathcal{H}_n/\sim \times \mathcal{H}_n/\sim \to [0, \infty)$ będzie określona wzorem

$$d_{\mathcal{H}_n/\sim}([W_{x^*}], [W_{y^*}]) = d(W_{x^*}, W_{y^*}).$$

Z Twierdzenia 2.2.3 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}_n/\sim \subset \mathcal{H}_{n+1}/\sim \subset \mathcal{H}/\sim.$$

Ponadto przestrzeń $(\mathcal{H}_n/\sim, d_{\mathcal{H}_n/\sim})$ jest homeomorficzna z (K_n, d_{ℓ_1}). Aby to wykazać wystarczy rozważyć zawężenie homeomorfizmu $\phi : \mathcal{H}/\sim \to K$ do zbioru $\mathcal{H}_n/\sim$, gdzie ϕ jest określony jak w dowodzie Twierdzenia 4.3.1.



Rysunek 4.2: Zbiór K_2 z przykładowymi ścieżkami łączącymi punkty $(1,0)$ i $(0,0)$, którym odpowiadają przestrzenie c i c_0.

Wniosek 4.3.7 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30]). *Niech ϕ będzie określone jak w dowodzie Twierdzenia 4.3.1. Wtedy dla dowolnego $r \in [0,1]$,*

$$\phi^{-1}\left(S_K((0,0,\dots),r)\right) = S_{\mathcal{H}/\sim}\left([c_0], \ln(1+2r)\right).$$

Ponadto dla $\mathcal{H}_n, K_n$ i ϕ_n określonych jak we Wniosku 4.3.6, mamy

$$\phi_n^{-1}\left(S_{K_n}((0,0,\dots),r)\right) = S_{\mathcal{H}_n/\sim}\left([c_0], \ln(1+2r)\right).$$

Uwaga 4.3.8. Pokażemy, że przestrzeń K nie jest lokalnie zwarta w żadnym punkcie tzn. dla dowolnego $x = (x(1), x(2), \dots) \in K$ i dowolnego $0 < \varepsilon \leqslant 1$ kula $B_K(x,\varepsilon)$ nie jest zwarta. Rozważmy najpierw dowolny punkt $x \in K$ postaci $x = (x(1), \dots, x(n), 0, 0, 0, \dots)$, gdzie $x(n) > 0$. Zdefiniujmy ciąg $(y_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \ell_1$ w następujący sposób:

$$y_m = \left(x(1), \dots, x(n-1), \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)x(n), \underbrace{\frac{\varepsilon}{2\cdot 10^m}x(n), \dots, \frac{\varepsilon}{2\cdot 10^m}x(n)}_{10^m}, 0, 0, 0, \dots\right).$$

Łatwo zauważyć, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$, $y_m \in B_K(x,\varepsilon)$ i ciąg $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ jest rozseparowany. Ponieważ punkty powyższej postaci tworzą zbiór gęsty w K, więc zbiór K nie jest lokalnie zwarty w żadnym punkcie. Wobec tego z Twierdzenia 4.3.1 przestrzeń $\mathcal{H}/_\sim$ nie jest lokalnie zwarta w żadnym punkcie.

Ponieważ zbiór K jest wypukły możemy wywnioskować, że przestrzeń K i w konsekwencji również przestrzeń $\mathcal{H}/_\sim$ są ściągalne. Ponadto zauważmy, że Twierdzenie 4.3.1 i Wniosek 4.3.6 ilustrują wielość i różnorodność ścieżek łączących dowolne dwa elementy przestrzeni $\mathcal{H}/_\sim$. Na przykład, każda ścieżka γ w K_n łącząca $(1,0,0,\dots)$ i $(0,0,0,\dots)$ odpowiada ścieżce $\phi^{-1}|_{K_n} \circ \gamma$ w $\mathcal{H}_n/_\sim$ łączącej $[c]$ i $[c_0]$ (patrz Rysunek 4.2), gdzie $\phi : \mathcal{H}/_\sim \to K$ jest homeomorfizmem zdefiniowanym w dowodzie Twierdzenia 4.3.1. W naturalny sposób nasuwa się pytanie o istnienie najkrótszej spośród nich oraz jej długość. W następnej sekcji zajmiemy się szerzej tym zagadnieniem.

4.3.2 Optymalna homotopia działająca na $\mathcal{H}/_\sim$

Przedmiotem niniejszego paragrafu będzie konstrukcja homotopii ściągającej $\mathcal{H}/_\sim$ do $[c_0]$ po najkrótszych ścieżkach w $\mathcal{H}/_\sim$, a także wyznaczenie długości każdej z nich.

Twierdzenie 4.3.9 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30]). *Niech funkcja $H : [0,1] \times \mathcal{H}/_\sim \to \mathcal{H}/_\sim$ będzie zdefiniowana w następujący sposób*

$$H(t, [W_{e^*}]) = [W_{(1-t)e^*}].$$

Wtedy:

(1) H jest homotopią ściągającą $\mathcal{H}/_\sim$ do $[c_0]$;

(2) dla dowolnej warstwy $[W_{e^*}] \in \mathcal{H}/_\sim$, $\gamma : [0,1] \to \mathcal{H}/_\sim$ określona wzorem $\gamma(t) = H(t, [W_{e^*}])$ jest najkrótszą krzywą w $\mathcal{H}/_\sim$ łączącą $[W_{e^*}]$ z $[c_0]$ i $L(\gamma) = 2\ln(1 + \|e^*\|)$.

Dowód Twierdzenia 4.3.9 opiera się na szeregu przytoczonych poniżej wyników. Zaczniemy od wykazania, że H jest homotopią.

Lemat 4.3.10 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30])**.** *H jest ciągła.*

Dowód. Niech przestrzeń (K, d_{ℓ_1}) będzie określona jak w Twierdzeniu 4.3.1. Rozważmy odwzorowanie $\widetilde{H} : [0,1] \times K \to K$ dane wzorem $\widetilde{H}(t,x) = (1-t)x$. Oczywiście $\widetilde{H}$ jest homotopią ściągającą K do punktu $(0,0,0,\dots) \in K$. Niech ϕ będzie homeomorfizmem określonym tak jak w dowodzie Twierdzenia 4.3.1. Wystarczy teraz zauważyć, że $H(t,[W_{e^*}]) = \phi^{-1}\left(\widetilde{H}\left(t, \phi\left([W_{e^*}]\right)\right)\right)$. □

Lemat 4.3.11 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30])**.** *Niech $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ i $e^* \in B_{\ell_1}$. Następnie niech $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{H}/_\sim$ będzie dana wzorem $\gamma(t) = [W_{te^*}]$. Wtedy γ jest krzywą lipschitzowską o długości*

$$L(\gamma) = 2\ln\frac{1+\beta\|e^*\|}{1+\alpha\|e^*\|}.$$

Dowód. Niech $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$ będą dowolnie wybrane. Wtedy z Przykładu 3.2.4

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}/_\sim}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) &= d(W_{t_1e^*}, W_{t_2e^*}) = \ln\left(\frac{1+2t_2\|e^*\| - t_1\|e^*\|}{1+t_1\|e^*\|}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{2t_2\|e^*\| - 2t_1\|e^*\|}{1+t_1\|e^*\|}\right) \leqslant \frac{2\|e^*\|}{1+t_1\|e^*\|}\cdot|t_2-t_1| \\ &\leqslant \frac{2\|e^*\|}{1+\alpha\|e^*\|}\cdot|t_2-t_1|. \end{aligned}$$

Wobec tego γ jest lipschitzowska i w konsekwencji prostowalna. Obliczymy teraz jej długość. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy następujący podział przedziału $[\alpha,\beta]$: $t_k^n = \alpha + \frac{k}{n}(\beta-\alpha)$, $k = 0,1,\dots,n$. Ponownie stosując Przykład 3.2.4 otrzymujemy

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} d_{\mathcal{H}/_\sim}\left(\gamma\left(t_{k+1}^n\right), \gamma\left(t_k^n\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} d\left(W_{t_{k+1}^n e^*}, W_{t_k^n e^*}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{1+2\|e^*\|\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}(k+1)\right) - \|e^*\|\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}k\right)}{1+\|e^*\|\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}k\right)}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+2+(1+\|e^*\|\alpha)\frac{n}{(\beta-\alpha)\|e^*\|}}{k+(1+||e^*||\alpha)\frac{n}{(\beta-\alpha)||e^*||}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+(1+||e^*||\alpha)\frac{n}{(\beta-\alpha)||e^*||}}{(1+||e^*||\alpha)\frac{n}{(\beta-\alpha)||e^*||}}\cdot\frac{n+1+(1+||e^*||\alpha)\frac{n}{(\beta-\alpha)||e^*||}}{1+(1+||e^*||\alpha)\frac{n}{(\beta-\alpha)||e^*||}}\right) \\ &= 2\ln\frac{1+\beta\|e^*\|}{1+\alpha\|e^*\|}. \end{aligned}$$

□

Lemat 4.3.12 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30]). *Niech* $[W_{x^*}], [W_{y^*}] \in \mathcal{H}/_\sim$ *będą takie, że* $\|x^*\| < \|y^*\|$. *Jeżeli* $\gamma : [0,1] \to \mathcal{H}/_\sim$ *jest krzywą łączącą* $[W_{x^*}]$ *z* $[W_{y^*}]$, *to* $L(\gamma) \geqslant 2\ln\frac{1+\|y^*\|}{1+\|x^*\|}$.

Dowód. Niech $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto [W_{x_t^*}] \in \mathcal{H}/_\sim$ będzie krzywą taką, że $\gamma(0) = [W_{x^*}]$ i $\gamma(1) = [W_{y^*}]$. Zdefiniujmy $f : [0,1] \to [0,1]$ za pomocą wzoru $f(t) = \|x_t^*\|$. Pokażemy, że f jest ciągła. W rzeczy samej, jeżeli $t_n \to t$, to

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathcal{H}/_\sim}(\gamma(t_n), \gamma(t)) = \lim_{n\to\infty} d_{\mathcal{H}/_\sim}([W_{x_{t_n}^*}], [W_{x_t^*}]) = \lim_{n\to\infty} d(W_{x_{t_n}^*}, W_{x_t^*}) = 0,$$

co w świetle Stwierdzenia 4.3.5 jest równoważne z $\lim_{n\to\infty} p(x_{t_n}^*, x_t^*) = 0$. Zatem korzystając z (IV),

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \|x_{t_n}^*\| = \|x_t^*\| = f(t),$$

co oznacza, że f jest ciągła. W związku z tym, ponieważ $f(0) = \|x^*\|$ i $f(1) = \|y^*\|$, otrzymujemy $f([0,1]) \supset [\|x^*\|, \|y^*\|]$. Niech

$$t_k^n = \max\left\{t \in [0,1] : f(t) = \|x^*\| + \frac{k}{n}\left(\|y^*\| - \|x^*\|\right)\right\},\ k = 1, \ldots, n,$$

i $t_0^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ta konstrukcja daje nam, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, podział przedziału $[0,1]$: $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = 1$. Stosując Twierdzenie 3.2.1 i podążając za obliczeniami z Lematu 4.3.11, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &\geqslant \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} d_{\mathcal{H}/_\sim}\left(\gamma\left(t_{k+1}^n\right), \gamma\left(t_k^n\right)\right) \geqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{1 + 2\|x_{t_{k+1}^n}^*\| - \|x_{t_k^n}^*\|}{1 + \|x_{t_k^n}^*\|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{1 + 2\left(\|x^*\| + \frac{k+1}{n}\left(\|y^*\| - \|x^*\|\right)\right) - \|x^*\| - \frac{k}{n}\left(\|y^*\| - \|x^*\|\right)}{1 + \|x^*\| + \frac{k}{n}\left(\|y^*\| - \|x^*\|\right)} \\
&= 2\ln\frac{1 + \|y^*\|}{1 + \|x^*\|}.
\end{aligned}$$

□

Z Lematów 4.3.11 i 4.3.12 otrzymujemy następujące wnioski.

Wniosek 4.3.13 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30]). *Niech* $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ *i* $e^* \in B_{\ell_1}$. *Wtedy*

$$d_{\mathcal{H}/_\sim}^{\text{path}}\left([W_{\beta e^*}], [W_{\alpha e^*}]\right) = 2\ln\frac{1 + \beta\|e^*\|}{1 + \alpha\|e^*\|}.$$

Ponadto $\gamma(t) = [W_{te^*}]$ *jest najkrótszą krzywą w* $\mathcal{H}/_\sim$ *łączącą* $[W_{\alpha e^*}]$ *i* $[W_{\beta e^*}]$. *W szczególności, dla* $\alpha = 0$ *i* $\beta = 1$ *otrzymujemy część (2) Twierdzenia 4.3.9.*

Wniosek 4.3.14 (A. Gergont, Ł. Piasecki [30]). *Hiperpłaszczyzna* $W_{(\sqrt{2}-1)e_1^*}$ *omawiana we Wniosku 3.2.7 jest równoodległa od* c *i* c_0 *również względem metryki ścieżkowej. Mianowicie*

$$d_{\mathcal{H}/_\sim}^{\text{path}}\left([c_0], [W_{(\sqrt{2}-1)e_1^*}]\right) = d_{\mathcal{H}/_\sim}^{\text{path}}\left([W_{(\sqrt{2}-1)e_1^*}], [c]\right) = \ln 2.$$

Ponadto, nie ma hiperpłaszczyzny W_{e^*} *równoodległej od* c *i* c_0 *o mniej niż* $\ln 2$.

Wniosek 4.3.15. *Niech $A \subset \mathcal{H}/_\sim$. Dla dowolnej warstwy $[W_{e^*}] \in \mathcal{H}/_\sim$ definiujemy odległość ścieżkową z $[W_{e^*}]$ do zbioru A wzorem*

$$\operatorname{dist}^{\text{path}}_{\mathcal{H}/\sim}([W_{e^*}], A) = \inf\left\{d^{\text{path}}_{\mathcal{H}/\sim}([W_{e^*}], [W_{x^*}]) : [W_{x^*}] \in A\right\}.$$

Wtedy, dla dowolnych $e^* \in B_{\ell_1}$ i $r \in [0,1]$ takich, że $0 \leqslant \|e^*\| \leqslant r \leqslant 1$, mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}^{\text{path}}_{\mathcal{H}/\sim}\Big([W_{e^*}], S_{\mathcal{H}/\sim}([c_0], \ln(1+2r))\Big) &= \inf\left\{d^{\text{path}}_{\mathcal{H}/\sim}([W_{e^*}], [W_{x^*}]) : x^* \in S_{\ell_1}(0,r)\right\} \\ &= d^{\text{path}}_{\mathcal{H}/\sim}([W_{e^*}], [W_{re^*/\|e^*\|}]) = 2\ln\frac{1+r}{1+\|e^*\|}.\end{aligned}$$

Uwaga 4.3.16. Należy wspomnieć, że odległość Banacha-Mazura pomiędzy dwiema izomorficznymi przestrzeniami Banacha X i Y możemy interpretować jako kres dolny długości, względem odległości Banacha-Mazura, wszystkich krzywych łączących X i Y. Szkic dowodu tego faktu oparty na technice interpolacyjnej rozwiniętej przez A. P. Calderóna [10] można znaleźć w [52]. Wobec tego z Twierdzenia 2.1.4 możemy wywnioskować, że w klasie $\mathcal{A}$ wszystkich przestrzeni Banacha izomorficznych z c_0, kres dolny długości wszystkich krzywych łączących c z c_0 jest równy $\ln 3$. Aby pokazać, że istnieje krzywa w $\mathcal{A}$ łącząca c i c_0 o długości równej $\ln 3$, wystarczy przywołać izomorfizm z Uwagi 2.1.6. Z drugiej strony z Wniosku 4.3.13 i punktu (ii) Twierdzenia 1.0.4 mamy

$$d^{\text{path}}_{\mathcal{H}/\sim}([c], [c_0]) = \ln 4.$$

Zanim przejdziemy do kolejnego wyniku, przypomnijmy, że dla dowolnej ℓ_1-predualnej X, stałą $r^*(X)$ określamy wzorem (3.1).

Zauważmy, że w podobny sposób jak w Lemacie 4.3.11, możemy obliczać długości pewnych krzywych w klasie $\mathcal{F}/_\sim$.

Lemat 4.3.17 (A. Gergont, wynik nieopublikowany)**.** *Niech $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ i $x_i^* \in B_{\ell_1}$, $i \in \mathbb{N}$. Połóżmy $X_t^\infty = \left(\sum_{i=1}^\infty W_{tx_i^*}\right)_{c_0}$, $t \in [0,1]$. Niech $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{F}/_\sim$ będzie określona wzorem $\gamma(t) = [X_t^\infty]$. Wtedy γ jest krzywą lipschitzowską łączącą $[X_\alpha^\infty]$ z $[X_\beta^\infty]$ o długości*

$$L(\gamma) = 2\ln\frac{1+\beta r^*(X_1^\infty)}{1+\alpha r^*(X_1^\infty)}.$$

Dowód. Niech $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$ będą dowolnie wybrane. Wtedy z Przykładu 3.2.9

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}/\sim}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) &= d\left(X_{t_1}^\infty, X_{t_2}^\infty\right) = \ln\left(\frac{1+2t_2 r^*(X_1^\infty) - t_1 r^*(X_1^\infty)}{1+t_1 r^*(X_1^\infty)}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{2t_2 r^*(X_1^\infty) - 2t_1 r^*(X_1^\infty)}{1+t_1 r^*(X_1^\infty)}\right) \\ &\leqslant \frac{2r^*(X_1^\infty)}{1+t_1 r^*(X_1^\infty)} \cdot |t_2 - t_1| \leqslant \frac{2r^*(X_1^\infty)}{1+\alpha r^*(X_1^\infty)} \cdot |t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

Stąd γ jest lipschitzowska i w konsekwencji prostowalna. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy następujący podział przedziału $[\alpha, \beta] : t_k^n = \alpha + \frac{k}{n}(\beta - \alpha)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Stosując ponownie Przykład 3.2.9 otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
L(\gamma) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} d_{\mathcal{F}/\sim}\left(\gamma\left(t_{k+1}^n\right),\gamma\left(t_k^n\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} d\left(X^\infty_{t_{k+1}^n}, X^\infty_{t_k^n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{1+2r^*\left(X_1^\infty\right)\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}(k+1)\right)-r^*\left(X_1^\infty\right)\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}k\right)}{1+r^*\left(X_1^\infty\right)\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}k\right)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+2+\left(1+r^*\left(X_1^\infty\right)\alpha\right)\frac{n}{(\beta-\alpha)r^*\left(X_1^\infty\right)}}{k+\left(1+r^*\left(X_1^\infty\right)\alpha\right)\frac{n}{(\beta-\alpha)r^*\left(X_1^\infty\right)}}\right) = 2\ln\frac{1+\beta r^*\left(X_1^\infty\right)}{1+\alpha r^*\left(X_1^\infty\right)}.
\end{aligned}
$$

□

Lemat 4.3.18 (A. Gergont, wynik nieopublikowany)**.** *Niech* $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ *i* $x_i^* \in B_{\ell_1}$, $i\in\mathbb{N}$. *Połóżmy* $X_t^n = \left(\sum_{i=1}^n W_{tx_i^*}\right)_{\ell_\infty^n}$, $t\in[0,1]$. *Niech* $\gamma : [\alpha,\beta]\to\mathcal{F}/_\sim$ *będzie dana wzorem* $\gamma(t) = [X_t^n]$. *Wtedy* γ *jest krzywą lipschitzowską łączącą* $[X_\alpha^n]$ *z* $[X_\beta^n]$ *o długości*

$$
L(\gamma) = 2\ln\frac{1+\beta r^*\left(X_1^n\right)}{1+\alpha r^*\left(X_1^n\right)}.
$$

Dowód. Dowód jest podobny do dowodu Lematu 4.3.17, więc go pomijamy. □

W dalszej części wykażemy, że krzywe określone w Lemacie 4.3.17 i Lemacie 4.3.18 są najkrótszymi krzywymi łączącymi odpowiednio X_α^∞ z X_β^∞ oraz X_α^n z X_β^n.

Kolejny lemat jest autorstwa Łukasza Piaseckiego (wynik nieopublikowany).

Lemat 4.3.19. *Niech* $X, X_n\in\mathcal{F}$, $n\in\mathbb{N}$. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} d\left(X_n,X\right)=0$, *to* $\lim_{n\to\infty} r^*\left(X_n\right) = r^*\left(X\right)$.

Dowód. Pokażemy najpierw, że granica $\lim_{n\to\infty} r^*\left(X_n\right)$ istnieje. Załóżmy, że to nie jest prawda. Wtedy istnieją podciągi $\left(X_{n_p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, $\left(X_{n_q}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ takie, że obie granice, $\lim_{p\to\infty} r^*\left(X_{n_p}\right)$ oraz $\lim_{q\to\infty} r^*\left(X_{n_q}\right)$ istnieją i $\lim_{p\to\infty} r^*\left(X_{n_p}\right) \neq \lim_{q\to\infty} r^*\left(X_{n_q}\right)$. Wtedy $r^*(X) \neq \lim_{p\to\infty} r^*\left(X_{n_p}\right)$ lub $r^*(X)\neq \lim_{q\to\infty} r^*(X_{n_q})$. Załóżmy, że $r^*(X)\neq\lim_{p\to\infty} r^*(X_{n_p})$. Jeżeli $r^*(X) > \lim_{p\to\infty} r^*\left(X_{n_p}\right)$, to z Twierdzenia 3.2.1 otrzymujemy

$$
\liminf_{p\to\infty} d\left(X_{n_p},X\right) \geqslant \ln\frac{1+2r^*(X)-\lim_{p\to\infty} r^*\left(X_{n_p}\right)}{1+\lim_{p\to\infty} r^*\left(X_{n_p}\right)} > 0.
$$

Jeżeli $r^*\left(X\right) < \lim_{p\to\infty} r^*\left(X_{n_p}\right)$, to ponownie stosując Twierdzenie 3.2.1 otrzymujemy

$$
\liminf_{p\to\infty} d\left(X_{n_p},X\right) \geqslant \ln\frac{1+2\lim_{p\to\infty} r^*\left(X_{n_p}\right)-r^*(X)}{1+r^*\left(X\right)} > 0.
$$

To prowadzi do sprzeczności z naszym założeniem. Podobne rozumowanie pokazuje, że

$$
\lim_{n\to\infty} r^*\left(X_n\right) = r^*\left(X\right).
$$

□

Stwierdzenie 4.3.20 (A. Gergont, wynik nieopublikowany)**.** *Niech* $[X_0],[X_1] \in \mathcal{F}/_\sim$ *będą takie, że* $r^*(X_0) < r^*(X_1)$. *Jeżeli* $\gamma : [0,1] \to \mathcal{F}/_\sim$ *jest krzywą łączącą* $[X_0]$ *z* $[X_1]$, *to*

$$L(\gamma) \geqslant 2\ln\frac{1+r^*(X_1)}{1+r^*(X_0)}.$$

Dowód. Niech $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto [X_t] \in \mathcal{F}/_\sim$. Zdefiniujmy $f : [0,1] \to [0,1]$ przez $f(t) = r^*(X_t)$. W świetle Lematu 4.3.19 funkcja f jest ciągła. Ponieważ $f(0) = r^*(X_0)$ i $f(1) = r^*(X_1)$, otrzymujemy $f([0,1]) \supset [r^*(X_0), r^*(X_1)]$. Niech

$$t_k^n = \max\left\{t \in [0,1] : f(t) = r^*(X_0) + \frac{k}{n}(r^*(X_1) - r^*(X_0))\right\}, k = 1,\dots,n$$

i $t_0^n = 0$. Ta konstrukcja daje nam, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, następujący podział odcinka $[0,1]$: $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = 1$. Zatem na mocy Twierdzenia 3.2.1 i obliczeń z Lematu 4.3.17 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &\geqslant \liminf_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} d_{\mathcal{F}/_\sim}\left(\gamma\left(t_{k+1}^{(n)}\right), \gamma\left(t_k^{(n)}\right)\right) \geqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\frac{1+2r^*(X_{t_{k+1}^n}) - r^*(X_{t_k^n})}{1+r^*(X_{t_k^n})} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\frac{1+2\frac{k+1}{n}\left(r^*(X_1)-r^*(X_0)\right)+r^*(X_0)-\frac{k}{n}\left(r^*(X_1)-r^*(X_0)\right)}{1+r^*(X_0)+\frac{k}{n}\left(r^*(X_1)-r^*(X_0)\right)} \\
&= 2\ln\frac{1+r^*(X_1)}{1+r^*(X_0)}.
\end{aligned}$$

□

Z Lematów 4.3.17-4.3.18 oraz Stwierdzenia 4.3.20 otrzymujemy następujący wynik.

Wniosek 4.3.21. *Niech* $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ *i* $x_i^* \in B_{\ell_1}$, $i \in \mathbb{N}$. *Połóżmy* $X_t^\infty = \left(\sum_{i=1}^\infty W_{tx_i^*}\right)_{c_0}$, $X_t^n = \left(\sum_{i=1}^n W_{tx_i^*}\right)_{\ell_\infty^n}$, $t \in [0,1]$. *Wtedy*

$$d^{\text{path}}_{\mathcal{F}/_\sim}\left([X_\alpha^\infty],[X_\beta^\infty]\right) = 2\ln\frac{1+\beta r^*\left(X_1^\infty\right)}{1+\alpha r^*\left(X_1^\infty\right)}$$

oraz

$$d^{\text{path}}_{\mathcal{F}/_\sim}\left([X_\alpha^n],[X_\beta^n]\right) = 2\ln\frac{1+\beta r^*\left(X_1^n\right)}{1+\alpha r^*\left(X_1^n\right)}.$$

4.4 Stabilność słabej* własności punktu stałego w obrębie wybranych klas ℓ_1-predualnych

Niech X będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha. Mówimy, że niepusty, ograniczony, wypukły i domknięty podzbiór C przestrzeni X ma *własność punktu stałego* (w skrócie WPS), jeśli każde *nieoddalające* przekształcenie $T : C \to C$ (tzn. przekształcenie spełniające warunek $\|T(x) - T(y)\| \leqslant \|x - y\|$ dla dowolnych $x, y \in C$) ma punkt stały. Przestrzeń dualna X^* ma *słabą* własność punktu stałego* (w skrócie $\sigma(X^*,X)$-WPS), jeśli każdy niepusty, wypukły, $\sigma(X^*,X)$-zwarty podzbiór C przestrzeni X^* ma WPS.

Przejdziemy teraz do przytoczenia znanych wyników dotyczących słabej* własności punktu stałego w obrębie ośrodkowych L_1-predualnych.

Twierdzenie 4.4.1 (L. A. Karlovitz [37]). *Przestrzeń ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, c_0)$-WPS.*

Twierdzenie 4.4.2 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki [19]). *Jeżeli X jest ośrodkową przestrzenią Lindenstraussa, dla której X^* nie jest ośrodkowa, to X^* nie ma $\sigma(X^*, X)$-WPS.*

Wynik ten jest wnioskiem z poniższego twierdzenia oraz faktu, że każda ośrodkowa L_1-predualna X, dla której X^* nie jest ośrodkowa, zawiera podprzestrzeń izometryczną z $C(\Delta)$ [43] (gdzie Δ oznacza zbiór Cantora) i wobec tego również podprzestrzeń izometryczną z c.

Twierdzenie 4.4.3 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki [19]). *Jeżeli ośrodkowa przestrzeń Banacha X zawiera izometryczną kopię przestrzeni c, to X^* nie ma $\sigma(X^*, X)$-WPS.*

Przypomnijmy, że jeśli X jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Lindenstraussa, dla której X^* jest ośrodkowa, to $X^* = \ell_1$. Wobec tego interesującym nas przypadkiem są ℓ_1-predualne.

Stwierdzenie 4.4.4 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki [19]). *Niech $e^* \in B_{\ell_1}$. Wtedy ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, W_{e^*})$-WPS wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z następujących warunków:*

1) $\|e^*\| < 1$,

2) $\|e^*\| = 1$ *i zbiór* $N^+ = \{n \in \mathbb{N} : e^*(n) \geqslant 0\}$ *jest skończony.*

Powyższy wynik jest wnioskiem z Twierdzenia 1.0.4 oraz poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 4.4.5 (M. A. Japón-Pineda, S. Prus [35]). *Niech τ będzie lokalnie wypukłą topologią w przestrzeni ℓ_1 słabszą niż słaba topologia na kuli jednostkowej. Przypuśćmy, że standardowa baza (e_n) jest zbieżna do $e \in \ell_1$ w topologii τ. Wówczas ℓ_1 ma τ-WPS wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:*

1) $\|e\| < 1$,

2) $\|e\| = 1$ *i zbiór* $N^+ = \{n \in \mathbb{N} : e(n) \geqslant 0\}$ *jest skończony.*

Kolejne twierdzenie charakteryzuje wszystkie ℓ_1-predualne X, dla których ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, X)$-WPS. Zanim przejdziemy do zaprezentowania tego wyniku, przypomnijmy, że o hiperpłaszczyźnie W_{e^*} mówimy, że jest *"zła w sensie $\sigma(\ell_1, W_{e^*})$-WPS"* (w skrócie *"zła"*), jeżeli $e^* \in B_{\ell_1}$ jest taki, że $\|e^*\| = 1$ i zbiór $N^+ = \{n \in \mathbb{N} : e^*(n) \geqslant 0\}$ jest nieskończony.

Twierdzenie 4.4.6 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki [19]). *Niech X będzie ℓ_1-predualną. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(1) ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, X)$-WPS.

(2) Istnieje podciąg $(e^*_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ standardowej bazy $(e^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w ℓ_1, który jest $\sigma(\ell_1, X)$-zbieżny do elementu $e^* \in \ell_1$ takiego, że $\|e^*\| = 1$ oraz $e^*(n_k) \geqslant 0$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$.

(3) Istnieje ilorazowa przestrzeni X izometryczna ze "złą" W_{x^*}.

(4) Istnieje ilorazowa przestrzeni X zawierająca izometryczną kopię "złej" W_{y^*}.

Uwaga 4.4.7. Jak wykazano w pracy [19], "złe" hiperpłaszczyzny W_{x^*} i W_{y^*} w warunkach (3) i (4) Twierdzenia 4.4.6 nie mogą zostać zastąpione przez c.

Twierdzenie 4.4.8 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki [20])**.** *Niech X będzie ℓ_1-predualną. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(1) ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, X)$-WPS.

(2) Istnieje ilorazowa przestrzeni X izometryczna z pewną nieskończenie wymiarową przestrzenią $A(S)$.

(3) Istnieje ilorazowa przestrzeni X zawierająca izometryczną kopię pewnej nieskończenie wymiarowej przestrzeni $A(S)$.

(4) Istnieje ilorazowa przestrzeni X izometryczna z ℓ_1-predualną hiperpłaszczyzną w c zawierającą element $(1, 1, 1, \dots)$ z przestrzeni c.

(5) Istnieje ilorazowa przestrzeni X zawierająca izometryczną kopię ℓ_1-predualnej hiperpłaszczyzny w c zawierającej element $(1, 1, 1, \dots)$ z przestrzeni c.

Uwaga 4.4.9. Warunki (4) i (5) Twierdzenia 4.4.8 wynikają z dowodu Twierdzenia 4.1 z pracy [19]. Jak wykazano w pracy [20] przestrzeń $A(S)$ w warunkach (2) i (3) Twierdzenia 4.4.8 nie może zostać zastąpiona przez żadną z przestrzeni $C(K)$. Ponadto wyraz "ilorazowa" nie może zostać zastąpiony przez "podprzestrzeń".

Zauważmy, że Twierdzenie 4.4.8 jest ciekawe w kontekście zaprezentowanej w rozprawie nowej charakteryzacji przestrzeni Lindenstraussa mających WROZ (patrz Twierdzenie 4.2.6).

Przykład 4.4.10. Wróćmy do ℓ_1-predualnych hiperpłaszczyzn $W_{x_1^*}, W_{x_2^*}, W_{x_3^*}$ i $W_{x_4^*}$ rozpatrywanych w Przykładach 4.1.6 i 4.2.9. W świetle Stwierdzenia 4.4.4, ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, W_{x_4^*})$-WPS, natomiast nie ma $\sigma(\ell_1, W_{x_1^*})$-WPS, $\sigma(\ell_1, W_{x_2^*})$-WPS i $\sigma(\ell_1, W_{x_3^*})$-WPS.

Ważnym zagadnieniem dotyczącym słabej* własności punktu stałego jest jej stabilność. Przypomnijmy, że X^* ma *stabilną słabą* własność punktu stałego*, jeśli istnieje $\gamma > 0$ taka, że Y^* ma $\sigma(Y^*, Y)$-WPS o ile $d(X, Y) < \gamma$ (patrz [22, Definicja 3.2]).

Twierdzenie 4.4.11 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, R. Popescu [22])**.** *Niech X będzie ℓ_1-predualną. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(1) ℓ_1 ma stabilną $\sigma(\ell_1, X)$-WPS.

(2) $(\operatorname{ext} B_{X^*})' \subset rB_{X^*}$ dla pewnego $0 \leqslant r < 1$.

Przejdźmy teraz do ujęcia ilościowego rzeczonego zagadnienia. Dla dowolnej przestrzeni Banacha X takiej, że X^* ma słabą*-WPS wprowadźmy następującą stałą stabilności:

$$\gamma^*(X) = \sup \{\gamma \geqslant 0 : d(X, Y) \leqslant \gamma \Rightarrow Y^* \text{ ma } \sigma(Y^*, Y)\text{-WPS}\},$$

a jeśli zbiór, dla którego rozważamy supremum jest pusty, to przyjmujemy $\gamma^*(X) = 0$. Uwaga ta będzie obowiązywała dla wszystkich stałych stabilności wprowadzonych w dalszej części pracy.

Okazuje się, że jeśli X jest ℓ_1-predualną, to wartość powyższej stałej zależy jedynie od $r^*(X)$.

Twierdzenie 4.4.12 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, R. Popescu [22, 21]). *Niech X będzie ℓ_1-predualną. Jeśli ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, X)$-WPS, to*

$$\gamma^*(X) = \ln \frac{2}{1+r^*(X)}.$$

W naszych rozważaniach zajmiemy się zagadnieniem stabilności słabej* własności punktu stałego w obrębie klas $\mathcal{H}$ i $\mathcal{F}$. Należy wspomnieć, że badania dotyczące stabilności słabej* własności punktu stałego w obrębie ℓ_1-predualnych zainicjowano w pracy [21]. Mianowicie, dla dowolnej ℓ_1-predualnej X takiej, że ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, X)$-WPS wprowadzono następującą stałą stabilności:

$$\eta^*(X) = \sup \{\eta \geqslant 0 : Y^* = \ell_1, d(X, Y) \leqslant \eta \Rightarrow Y^* \text{ ma } \sigma(\ell_1, Y)\text{-WPS}\}.$$

Twierdzenie 4.4.13 (E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, R. Popescu [21]).

$$\eta^*(c_0) = \ln 3.$$

Podążając tą ścieżką badań, dla każdej $W_{e^*} \in \mathcal{H}$ takiej, że ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, W_{e^*})$-WPS zajmiemy się oszacowaniem następującej stałej:

$$\eta^*_{\mathcal{H}}(W_{e^*}) = \sup \{\eta \geqslant 0 : Y \in \mathcal{H}, d(W_{e^*}, Y) \leqslant \eta \Rightarrow Y^* \text{ ma } \sigma(\ell_1, Y)\text{-WPS}\}.$$

Interesującą własnością w teorii punktów stałych, która będzie dla nas użyteczna podczas dalszych dywagacji jest *prawie stabilna słaba* własność punktu stałego* wprowadzona przez Ł. Piaseckiego [56]. Przypomnijmy, że X^* ma prawie stabilną słabą* własność punktu stałego (w skrócie p. s. $\sigma(X^*, X)$-WPS), jeśli Y^* ma $\sigma(Y^*, Y)$-WPS o ile $d(X, Y) = 0$. Wobec tego możemy wywnioskować, że dla dowolnej przestrzeni Banacha X mamy

$$\text{stabilna } \sigma(X^*, X)\text{-WPS} \Rightarrow \text{prawie stabilna } \sigma(X^*, X)\text{-WPS} \Rightarrow \sigma(X^*, X)\text{-WPS}.$$

Należy zaznaczyć, że w ogólności implikacje w drugą stronę nie zachodzą, nawet w obrębie ℓ_1-predualnych. Dowodzą temu Przykłady 3.2-3.3 z [55] oraz Przykłady 3.4-3.5 z [56].

Przywołamy teraz kluczowe dla naszych dalszych rozważań wyniki.

Stwierdzenie 4.4.14 (Ł. Piasecki [56]). *Niech X będzie ℓ_1-predualną taką, że standardowa baza (e_n^*) jest $\sigma(\ell_1, X)$-zbieżna do e^*. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

(1) ℓ_1 ma prawie stabilną $\sigma(\ell_1, X)$-WPS.

(2) ℓ_1 ma stabilną $\sigma(\ell_1, X)$-WPS.

(3) $\|e^*\| < 1$.

(4) Dla każdego $x^* \in S_{\ell_1}$ mamy $p(e^*, x^*) > 0$.

(5) Dla dowolnej przestrzeni Banacha Y takiej, że $d(X, Y) = 0$, $c \not\subset Y$.

Stwierdzenie 4.4.15 (Ł. Piasecki [56]). *Niech $X = \left(\sum_{i=1}^n W_{x_i^*}\right)_{\ell_\infty^n}$, gdzie $x_i^* \in B_{\ell_1}$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

(1) ℓ_1 *ma prawie stabilną* $\sigma(\ell_1, X)$*-WPS.*

(2) ℓ_1 *ma stabilną* $\sigma(\ell_1, X)$*-WPS.*

(3) $\|x_i^*\| < 1$ *dla każdego* $i = 1, \ldots, n$*.*

(4) Dla każdego $x^* \in S_{\ell_1}$ *oraz* $i = 1, \ldots, n$ *mamy* $p(x_i^*, x^*) > 0$*.*

(5) Dla dowolnej przestrzeni Banacha Y *takiej, że* $d(X, Y) = 0$, $c \not\subset Y$*.*

Stwierdzenie 4.4.16 (Ł. Piasecki [56])**.** *Niech* $X = \left(\sum_{i=1}^{\infty} W_{x_i^*}\right)_{c_0}$*, gdzie* $x_i^* \in B_{\ell_1}$ *dla każdego* $i \in \mathbb{N}$*. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

(1) ℓ_1 *ma prawie stabilną* $\sigma(\ell_1, X)$*-WPS.*

(2) Dla każdego $y^* \in S_{\ell_1}$ *oraz dowolnego ciągu* (y_n^*) *w* $(\operatorname{ext} B_{X^*})'$ *mamy* $\liminf\limits_{n\to\infty} p(y_n^*, y^*) > 0$*.*

(3) Dla dowolnej przestrzeni Banacha Y *takiej, że* $d(X, Y) = 0$, $c \not\subset Y$*.*

Uwaga 4.4.17 (Ł. Piasecki [56])**.** Ze Stwierdzenia 4.4.4 oraz Twierdzenia 4.4.11, ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, W_{e^*})$-WPS i jednocześnie ℓ_1 nie ma stabilnej $\sigma(\ell_1, W_{e^*})$-WPS wtedy i tylko wtedy, gdy $\|e^*\| = 1$ i zbiór $N^+ = \{n \in \mathbb{N} : e^*(n) \geqslant 0\}$ jest skończony. Zauważmy, że w tym przypadku z Twierdzenia 2.2.3 i Twierdzenia 2.2.2 możemy wskazać nieskończenie wiele wzajemnie nieizometrycznych przestrzeni $W_{\overline{e^*}_{i,\epsilon}} \in \mathcal{F}_{W_{e^*}}$ takich, że ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, W_{\overline{e^*}_{i,\epsilon}})$-WPS i jednocześnie nieskończenie wiele wzajemnie nieizometrycznych przestrzeni $W_{\overline{e^*}_{i,\epsilon}} \in \mathcal{F}_{W_{e^*}}$ takich, że ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, W_{\overline{e^*}_{i,\epsilon}})$-WPS. Istotnie, przyjmując $\epsilon = (-1, -1, -1, \ldots)$ zbiór $\{W_{\overline{e^*}_{i,\epsilon}} : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ składa się z wzajemnie nieizometrycznych przestrzeni takich, że $d(W_{e^*}, W_{\overline{e^*}_{i,\epsilon}}) = 0$ oraz ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, W_{\overline{e^*}_{i,\epsilon}})$-WPS dla każdego $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Następnie wystarczy rozważyć rodzinę ciągów znaków $\{\epsilon_k = (\epsilon_k(n)) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ takich, że $\epsilon_k(n) = (-1)^{[(n-1)/2^k]}$ dla dowolnych $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wtedy zbiór $\{W_{\overline{e^*}_{\infty,\epsilon_k}} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ składa się z wzajemnie nieizometrycznych przestrzeni takich, że $d(W_{e^*}, W_{\overline{e^*}_{\infty,\epsilon_k}}) = 0$ oraz ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, W_{\overline{e^*}_{\infty,\epsilon_k}})$-WPS dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Zauważmy, że wobec powyższej uwagi, rozważania dotyczące stałej $\eta^*_{\mathcal{H}}(W_{e^*})$ możemy ograniczyć do przypadku, gdy $\|e^*\| < 1$.

Twierdzenie 4.4.18 (A. Gergont, Ł. Piasecki [29])**.** *Dla każdego* $e^* \in \operatorname{int} B_{\ell_1}$ *mamy*

$$\eta^*_{\mathcal{H}}(W_{e^*}) = \ln \frac{3 - \|e^*\|}{1 + \|e^*\|}.$$

Dowód. Jeżeli $e^* = 0$, to W_{e^*} jest izometrycznie izomorficzna z c_0 (patrz punkt (ii) Twierdzenia 1.0.4). Ze Stwierdzenia 3.2.3 i Stwierdzenia 4.4.4 otrzymujemy, że $\eta^*_{\mathcal{H}}(c_0) \leqslant \ln 3$. Ponieważ $\eta^*_{\mathcal{H}}(c_0) \geqslant \eta^*(c_0) = \ln 3$ (patrz Twierdzenie 4.4.13), więc $\eta^*_{\mathcal{H}}(c_0) = \ln 3$.

Załóżmy teraz, że $\|e^*\| > 0$. Ze Stwierdzenia 4.4.14, jeżeli $W_{x^*} \in \mathcal{H}$ jest taka, że ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, W_{x^*})$-WPS, to W_{x^*} zawiera prawie izometryczne kopie przestrzeni c. Zatem z Wniosku 3.1.5

$$d(W_{x^*}, W_{e^*}) \geqslant \ln \frac{3 - \|e^*\|}{1 + \|e^*\|}.$$

W konsekwencji,

$$\eta^*_{\mathcal{H}}(W_{e^*}) \geqslant \ln \frac{3-\|e^*\|}{1+\|e^*\|}.$$

Aby zakończyć dowód pozostaje nam pokazać, że $d(W_{e^*}, W_{e^*/\|e^*\|}) = \ln \frac{3-\|e^*\|}{1+\|e^*\|}$ i ponownie zastosować Stwierdzenie 4.4.14. W tym celu zacznijmy od rozważenia hiperpłaszczyzny $W_{x_n^*}$, gdzie

$$x_n^* = (e^*(1), \dots, e^*(n), 0, 0, \dots) \in \operatorname{int} B_{\ell_1},$$

przy czym liczba $n \in \mathbb{N}$ jest na tyle duża, aby zagwarantować, że $x_n^* \neq 0$. Rozważmy odwzorowanie $T_n : W_{x_n^*/\|x_n^*\|} \to W_{x_n^*}$ określone dla dowolnego $x = (x(1), x(2), \dots) \in W_{x_n^*/\|x_n^*\|}$ w następujący sposób:

$$T_n(x)(i) = \begin{cases} x(i) & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \frac{1+\|x_n^*\|}{2} x(i) + \frac{1-\frac{1}{\|x_n^*\|}}{2} \sum_{j=1}^n e^*(j)x(j) & \text{dla } i > n. \end{cases}$$

Dla dowolnego n, T_n jest izomorfizmem i $\|T_n\| \leqslant 1$. Aby pokazać, że $\|T_n\| = 1$, wystarczy rozważyć element

$$(\operatorname{sgn} e^*(1), \dots, \operatorname{sgn} e^*(n), 1, 1, \dots) \in S_{W_{x_n^*/\|x_n^*\|}}.$$

Z drugiej strony, dla dowolnego $x = (x(1), x(2), \dots) \in W_{x_n^*}$ mamy

$$T_n^{-1}(x)(i) = \begin{cases} x(i) & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \frac{2}{1+\|x_n^*\|} x(i) + \frac{\frac{1}{\|x_n^*\|}-1}{1+\|x_n^*\|} \sum_{j=1}^n e^*(j)x(j) & \text{dla } i > n. \end{cases}$$

Łatwo wywnioskować, że $\|T_n^{-1}\| \leqslant (3 - \|x_n^*\|)/(1 + \|x_n^*\|)$. Aby pokazać równość, wystarczy rozważyć element

$$(\operatorname{sgn} e^*(1), \dots, \operatorname{sgn} e^*(n), 1, \|x_n^*\|, \|x_n^*\|, \dots) \in S_{W_{x_n^*}}.$$

Wobec tego $\|T_n\| \|T_n^{-1}\| = (3 - \|x_n^*\|)/(1 + \|x_n^*\|)$. Następnie zauważmy, że ze Stwierdzenia 4.1.5 wynika, że przestrzeń $W_{x_n^*/\|x_n^*\|}$ zawiera izometryczną kopię przestrzeni c. Zatem, w świetle Twierdzenia 3.1.3, otrzymujemy

$$d(W_{x_n^*/\|x_n^*\|}, W_{x_n^*}) = \ln \frac{3-\|x_n^*\|}{1+\|x_n^*\|}.$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \|x_n^* - e^*\| = 0$, więc z Lematu 3.2.2 dostajemy

$$d(W_{e^*}, W_{e^*/\|e^*\|}) = \ln \frac{3-\|e^*\|}{1+\|e^*\|}.$$

□

Przeprowadzimy teraz analogiczne rozumowanie dotyczące stabilności słabej* własności punktu stałej w obrębie klasy $\mathcal{F}$. Dla każdej przestrzeni $X \in \mathcal{F}$ takiej, że ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, X)$-WPS, rozważmy następującą stałą:

$$\eta^*_{\mathcal{F}}(X) = \sup \{\eta \geqslant 0 : Y \in \mathcal{F}, d(X, Y) \leqslant \eta \Rightarrow Y^* \text{ ma } \sigma(\ell_1, Y)\text{-WPS}\}.$$

Twierdzenie 4.4.19 (A. Gergont, wynik nieopublikowany). *Dla dowolnej przestrzeni $X \in \mathcal{F}$ takiej, że ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, X)$-WPS mamy*

$$\eta^*_{\mathcal{F}}(X) = \ln \frac{3 - r^*(X)}{1 + r^*(X)}.$$

Dowód. Niech przestrzeń $X \in \mathcal{F}$ będzie taka, że ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, X)$-WPS. Zauważmy, że z Twierdzenia 4.4.6 i Stwierdzeń 4.4.15-4.4.16 wynika, że jeżeli przestrzeń $Y \in \mathcal{F}$ jest taka, że ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, Y)$-WPS, to zawiera prawie izometryczne kopie przestrzeni c. Zatem z Wniosku 3.1.5

$$d(X, Y) \geqslant \ln \frac{3 - r^*(X)}{1 + r^*(X)}$$

i wobec tego

$$\eta^*_{\mathcal{F}}(X) \geqslant \ln \frac{3 - r^*(X)}{1 + r^*(X)}.$$

Rozważmy teraz dwa przypadki. Jeśli $r^*(X) = 0$, to $X = c_0$. Ponieważ $c \in \mathcal{F}$, $d(c, c_0) = \ln 3$ i ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, c)$-WPS, więc otrzymujemy $\eta^*_{\mathcal{F}}(c_0) = \ln 3$.

Załóżmy teraz, że $r^*(X) > 0$. Przyjmijmy, że $X = \left(\sum_{i=1}^{\infty} W_{x_i^*}\right)_{c_0}$, gdzie $x_i^* \in B_{\ell_1}$, $i \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$(\operatorname{ext} B_{X^*})' = \{(0, 0, \dots)\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\pm(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, x_i^*, 0, 0, \dots)\}.$$

Połóżmy $\widetilde{x_i^*} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, x_i^*, 0, 0, \dots)$. Niech $\varepsilon \in (0, r^*(X))$ będzie dowolnie wybrany. Wybierzmy $\widetilde{x_{i_0}^*} \in (\operatorname{ext} B_{X^*})'$ taki, że $\|\widetilde{x_{i_0}^*}\| = \|x_{i_0}^*\| > r^*(X) - \varepsilon$. Zdefiniujmy teraz przestrzeń Y_{i_0} w taki sposób, że składnik o numerze i_0 w $X = \left(\sum_{i=1}^{\infty} W_{x_i^*}\right)_{c_0}$ zastępujemy przez $W_{x_{i_0}^*/\|x_{i_0}^*\|}$. Zauważmy, że ze Stwierdzenia 4.4.16, istnieje taka przestrzeń Banacha Z, że $d(Y_{i_0}, Z) = 0$ i $c \subset Z$. Z Twierdzenia 4.4.3 wynika, że ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, Z)$-WPS. Ponadto zauważmy, że

$$d(X, Y_{i_0}) \leqslant d(W_{x_{i_0}^*}, W_{x_{i_0}^*/\|x_{i_0}^*\|}).$$

Korzystając z Przykładu 3.2.4 otrzymujemy

$$d(W_{x_{i_0}^*}, W_{x_{i_0}^*/\|x_{i_0}^*\|}) = \ln \frac{3 - \|x_{i_0}^*\|}{1 + \|x_{i_0}^*\|}.$$

W konsekwencji,

$$d(X, Y_{i_0}) \leqslant \ln \frac{3 - \|x_{i_0}^*\|}{1 + \|x_{i_0}^*\|} < \ln \frac{3 - r^*(X) + \varepsilon}{1 + r^*(X) - \varepsilon}.$$

Przechodząc z $\varepsilon \to 0$ dostajemy

$$\eta^*_{\mathcal{F}}(X) \leqslant \ln \frac{3 - r^*(X)}{1 + r^*(X)},$$

co kończy dowód. Przypadek, gdy $X = \left(\sum_{i=1}^{n} W_{x_i^*}\right)_{\ell_\infty^n}$, gdzie $x_i^* \in B_{\ell_1}$, $i = 1, \dots, n$, dowodzi się w analogiczny sposób. □

Zauważmy, że ze Stwierdzenia 4.4.14, ℓ_1 ma prawie stabilną $\sigma(\ell_1, W_{e^*})$-WPS wtedy i tylko wtedy, gdy $\|e^*\| < 1$. Ponadto Stwierdzenie 4.4.4 i Twierdzenie 2.2.3 pokazują, że dla każdego $e^* \in S_{\ell_1}$ takiego, że ℓ_1 ma $\sigma(\ell_1, W_{e^*})$-WPS, warstwa $[W_{e^*}]$ zawiera hiperpłaszczyznę W_{x^*} taką, że ℓ_1 nie ma $\sigma(\ell_1, W_{x^*})$-WPS (patrz również Uwaga 4.4.17). W związku z tym w kontekście metryki ścieżkowej w $\mathcal{H}/_\sim$ definicja prawie stabilnej słabej* własności punktu stałego jest bardziej stosowna niż definicja słabej* własności punktu stałego. Wobec tego, dla dowolnej warstwy $[W_{e^*}] \in \mathcal{H}/_\sim$ takiej, że ℓ_1 ma prawie stabilną $\sigma(\ell_1, W_{e^*})$-WPS, wprowadźmy nową stałą:

$$\eta^{\text{path}}_{\mathcal{H}/_\sim}([W_{e^*}]) = \sup\{\eta \geqslant 0 : [W_{x^*}] \in \mathcal{H}/_\sim, d^{\text{path}}_{\mathcal{H}/_\sim}([W_{e^*}], [W_{x^*}]) \leqslant \eta \Rightarrow \ell_1 \text{ ma p. s. } \sigma(\ell_1, W_{x^*})\text{-WPS}\}.$$

Wyznaczymy teraz dokładne wartości tej stałej.

Twierdzenie 4.4.20 (A. Gergont, wynik nieopublikowany)**.** *Dla dowolnego* $e^* \in \operatorname{int} B_{\ell_1}$ *mamy*

$$\eta^{\text{path}}_{\mathcal{H}/_\sim}([W_{e^*}]) = 2\ln\frac{2}{1+\|e^*\|}.$$

Dowód. Twierdzenie jest konsekwencją Stwierdzenia 4.4.14 i Wniosku 4.3.15 dla $r = 1$. □

Podobnie jak w przypadku stałej stabilności słabej* własności punktu stałego, również i tutaj możemy uogólnić nasze badania na szerszą klasę przestrzeni. Dla dowolnej warstwy $[X] \in \mathcal{F}/_\sim$ takiej, że ℓ_1 ma prawie stabilną $\sigma(\ell_1, X)$-WPS, zdefiniujmy następującą stałą:

$$\eta^{\text{path}}_{\mathcal{F}/_\sim}([X]) = \sup\{\eta \geqslant 0 : [Y] \in \mathcal{F}/_\sim, d^{\text{path}}_{\mathcal{F}/_\sim}([X], [Y]) \leqslant \eta \Rightarrow \ell_1 \text{ ma p. s. } \sigma(\ell_1, Y)\text{-WPS}\}.$$

Twierdzenie 4.4.21 (A. Gergont, wynik nieopublikowany)**.** *Dla każdej warstwy* $[X] \in \mathcal{F}/_\sim$ *takiej, że* ℓ_1 *ma prawie stabilną* $\sigma(\ell_1, X)$*-WPS mamy*

$$\eta^{\text{path}}_{\mathcal{F}/_\sim}([X]) = 2\ln\frac{2}{1+r^*(X)}.$$

Dowód. W świetle Stwierdzeń 4.4.15, 4.4.16 i 4.3.20 otrzymujemy

$$\eta^{\text{path}}_{\mathcal{F}/_\sim}([X]) \geqslant 2\ln\frac{2}{1+r^*(X)}.$$

Rozważmy teraz dwa przypadki. Jeżeli $r^*(X) = 0$, to $X = c_0$. Z Wniosku 4.3.21 dla dowolnej $[Y] \in \mathcal{F}/_\sim$ mamy $d^{\text{path}}_{\mathcal{F}/_\sim}([c_0], [Y]) = 2\ln(1+r^*(Y))$. Ponownie korzystając ze Stwierdzeń 4.4.15 i 4.4.16 otrzymujemy $\eta^{\text{path}}_{\mathcal{F}/_\sim}([c_0]) = \ln 4$.

Przejdźmy teraz do przypadku, gdy $r^*(X) > 0$. Przyjmijmy, że $X = \left(\sum_{i=1}^{\infty} W_{x_i^*}\right)_{c_0}$, gdzie $x_i^* \in B_{\ell_1}$, $i \in \mathbb{N}$. Dla dowolnego $\varepsilon \in (0, r^*(X))$ w dokładnie ten sam sposób jak w dowodzie Twierdzenia 4.4.19 skonstruujmy przestrzeń Y_{i_0}. Ze Stwierdzenia 4.4.16, ℓ_1 nie ma prawie stabilnej $\sigma(\ell_1, Y_{i_0})$-WPS. Następnie przez X_t oznaczmy przestrzeń $X = \left(\sum_{i=1}^{\infty} W_{x_i^*}\right)_{c_0}$, w której składnik o numerze i_0 zastępujemy przez $W_{tx_{i_0}^*}$ dla $t \in [1, 1/\|x_{i_0}^*\|]$ oraz określmy krzywą $\gamma : [1, 1/\|x_{i_0}^*\|] \to \mathcal{F}/_\sim$ wzorem $\gamma(t) = [X_t]$. Niech $1 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1/\|x_{i_0}^*\|$ będą dowolnie wybrane. Naśladując metodę rozumowania z Lematu 4.3.11 otrzymujemy oszacowanie:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}/_\sim}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) &= d\left(X_{t_1}, X_{t_2}\right) \leqslant d(W_{t_1 x_{i_0}^*}, W_{t_2 x_{i_0}^*}) = \ln\left(\frac{1+2t_2\|x_{i_0}^*\| - t_1\|x_{i_0}^*\|}{1+t_1\|x_{i_0}^*\|}\right) \\ &\leqslant \frac{2\|x_{i_0}^*\|}{1+t_1\|x_{i_0}^*\|} \cdot |t_2 - t_1| \leqslant \frac{2\|x_{i_0}^*\|}{1+\|x_{i_0}^*\|} \cdot |t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

Stąd γ jest lipschitzowska i wobec tego prostowalna. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, rozważmy następujący podział przedziału $[1, 1/\|x_{i_0}^*\|]$: $t_k^n = 1 + \frac{k}{n}\left(\frac{1}{\|x_{i_0}^*\|} - 1\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Z obliczeń z Lematu 4.3.11 otrzymujemy

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} d_{\mathcal{F}/\sim}\left(\gamma\left(t_{k+1}^n\right), \gamma\left(t_k^n\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} d\left(X_{t_{k+1}^n x_{i_0}^*}, X_{t_k^n x_{i_0}^*}\right) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} d\left(W_{t_{k+1}^n x_{i_0}^*}, W_{t_k^n x_{i_0}^*}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{1 + 2\|x_{i_0}^*\|\left(1 + \frac{\frac{1}{\|x_{i_0}^*\|} - 1}{n}(k+1)\right) - \|x_{i_0}^*\|\left(1 + \frac{\frac{1}{\|x_{i_0}^*\|} - 1}{n}k\right)}{1 + \|x_{i_0}^*\|\left(1 + \frac{\frac{1}{\|x_{i_0}^*\|} - 1}{n}k\right)}\right) \\ &= 2\ln\frac{2}{1 + \|x_{i_0}^*\|}. \end{aligned}$$

Wobec tego $d_{\mathcal{F}/\sim}^{\text{path}}([X], [Y_{i_0}]) \leqslant 2\ln\frac{2}{1+\|x_{i_0}^*\|} < 2\ln\frac{2}{1+r^*(X)-\varepsilon}$. Przechodząc do granicy z $\varepsilon \to 0$, otrzymujemy

$$\eta_{\mathcal{F}/\sim}^{\text{path}}([X]) \leqslant 2\ln\frac{2}{1 + r^*(X)},$$

co kończy dowód. Przypadek, gdy $X = \left(\sum_{i=1}^n W_{x_i^*}\right)_{\ell_\infty^n}$ dla $x_i^* \in B_{\ell_1}$, $i = 1, \ldots, n$, jest analogiczny, więc go pomijamy. □

Uwaga 4.4.22. Warto zwrócić uwagę na to, jak stałe stabilności mogą się od siebie różnić w zależności od tego, w obrębie której klasy przestrzeni się poruszamy. Jako przykład porównajmy stałe stabilności dla przestrzeni c_0. Z Twierdzenia 4.4.12 wynika, że $\gamma^*(c_0) = \ln 2$, podczas gdy z Twierdzeń 4.4.13, 4.4.18 i 4.4.19 otrzymujemy $\eta^*(c_0) = \eta_{\mathcal{H}}^*(c_0) = \eta_{\mathcal{F}}^*(c_0) = \ln 3$. Z drugiej strony, w przypadku stałej stabilności opartej na metryce ścieżkowej, $\eta_{\mathcal{H}/\sim}^{\text{path}}([c_0]) = \eta_{\mathcal{F}/\sim}^{\text{path}}([c_0]) = \ln 4$ (patrz Twierdzenia 4.4.20-4.4.21).

Bibliografia

[1] D. E. Alspach, *Quotients of c_0 are almost isometric to subspaces of c_0*, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1979), 285–288.

[2] D. E. Alspach, *A ℓ_1-predual which is not isometric to a quotient of $C(\alpha)$*, arXiv:math/9204215v1 (1992).

[3] D. Amir, *On isomorphisms of continuous function spaces*, Israel J. Math. 3 (1965), 205–210.

[4] R. F. Arens, J. L. Kelley, *Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff space*, Trans. Amer. Soc. 62 (1947), 499–508.

[5] S. Banach, *Sur les fonctionelles linéaires*, Studia Math. 1 (1929), 211–216, 223–239.

[6] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

[7] J. B. Bednar, H. E. Lacey, *Concerning Banach spaces whose duals are abstract L-spaces*, Pacific J. Math. 41 (1972), 13–24.

[8] E. Behrends, *M-structure and the Banach-Stone Theorem*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[9] C. Bessaga, A. Pełczyński, *Spaces of continuous functions IV*, Studia Math. 19 (1960), 53–61.

[10] A. P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. 24 (1964), 113–190.

[11] M. Cambern, *A generalized Banach-Stone theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1966), 396–400.

[12] M. Cambern, *On isomorphisms with small bound*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 1062–1066.

[13] M. Cambern, *On mappings of sequence spaces*, Studia Math. 30 (1968), 73–77.

[14] M. Cambern, *Isomorphisms of $C_0(Y)$ with Y discrete*, Math. Ann. 188 (1970), 23–25.

[15] M. Cambern, *Mappings of continuous function spaces*, Notices Amer. Math. Soc. 16 (1970), 317.

[16] L. Candido, E. M. Galego, *How far is $C_0(\Gamma, X)$ with Γ discrete from $C_0(K, X)$ spaces?*, Fund. Math. 218 (2012), 151–163.

[17] L. Candido, E. M. Galego, *How far is $C(\omega)$ from the other $C(K)$ spaces?*, Studia Math. 217 (2) (2013), 123–138.

[18] E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, *Hyperplanes in the space of convergent sequences and preduals of ℓ_1*, Canad. Math. Bull. 58 (2015), 459–470.

[19] E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, *Separable Lindenstrauss spaces whose duals lack the weak* fixed point property for nonexpansive mappings*, Studia Math. 238 (1) (2017), 1–16.

[20] E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, *Weak* fixed point property and the space of affine functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 149 (4) (2021), 1613–1620.

[21] E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, R. Popescu, *Stability constants of the weak* fixed point property in the space ℓ_1*, J. Math. Anal. Appl. 452 (1) (2017), 673–684.

[22] E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, R. Popescu, *Weak* fixed point property in ℓ_1 and polyhedrality in Lindenstrauss spaces*, Studia Math. 241 (2) (2018), 159–172.

[23] E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, L. Veselý, *Rethinking polyhedrality for Lindenstrauss spaces*, Israel J. Math. 216 (2016), 355–369.

[24] H. B. Cohen, *A bound-two isomorphism between $C(X)$ Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 50 (1975), 215–217.

[25] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience Publishers, 1958.

[26] R. Durier, P. L. Papini, *Polyhedral norms in an infinite dimensional space*, Rocky Mountain J. Math. 23 (1993), 863–875.

[27] V. P. Fonf, J. Lindenstrauss, R. R. Phelps, *Infinite Dimensional Convexity*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, 599–670, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[28] V. P. Fonf, L. Veselý, *Infinite-dimensional polyhedrality*, Canad. J. Math. 56 (2004), 472–494.

[29] A. Gergont, Ł. Piasecki, *On isomorphic embeddings of c into L_1-preduals and some applications*, J. Math. Anal. Appl. 492 (1) (2020), 124431, 11 pp.

[30] A. Gergont, Ł. Piasecki, *Some topological and metric properties of the space of ℓ_1-predual hyperplanes in c*, Colloq. Math. 168 (2) (2022), 229–247.

[31] Y. Gordon, *On the distance coefficient between isomorphic function spaces*, Israel J. Math. 8 (1970), 391–397.

[32] A. J. Guirao, V. Montesinos, V. Zizler, *On Preserved and Unpreserved Extreme Points*, Descriptive Topology and Functional Analysis, 163–193, Springer Proc. Math. Stat., 80, Springer, 2014.

[33] V. I. Gurariĭ, *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 167 (1966), 971–973.

[34] H. Hahn, *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen*, J. Reine Angew. Math. 157 (1927), 214–229.

[35] M. A. Japón-Pineda, S. Prus, *Fixed point property for general topologies in some Banach spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. 70 (2004), 229–244.

[36] S. Kakutani, *Concrete representation of abstract M spaces*, Ann. of Math. 42 (1941), 994–1024.

[37] L. A. Karlovitz, *On nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976), 321–325.

[38] V. Klee, *Polyhedral sections of convex bodies*, Acta Math. 103 (1960), 243–267.

[39] H. E. Lacey, *The isometric theory of classical Banach spaces*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 208, Springer-Verlag, 1974.

[40] H. E. Lacey, P. D. Morris, *On spaces of type $A(K)$ and their duals*, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), 151–157.

[41] A. J. Lazar, *Polyhedral Banach spaces and extensions of compact operators*, Israel J. Math. 7 (1969), 357–364.

[42] A. J. Lazar, J. Lindenstrauss,*On Banach spaces whose duals are L^1 spaces*, Israel J. Math. 4 (1966), 205–207.

[43] A. J. Lazar, J. Lindenstrauss, *Banach spaces whose duals are L^1 spaces and their representing matrices*, Acta Math. 126 (1971), 165–193.

[44] K.-S. Lau, *The dual ball of Lindenstrauss space*, Math. Scand. 33 (1973), 323–337.

[45] J. Lindenstrauss, *Extension of compact operators*, Mem. Amer. Math. Soc. 48 (1964).

[46] J. Lindenstrauss, D. E. Wulbert, *On the classification of the Banach spaces whose duals are L^1 spaces*, J. Funct. Anal. 4 (1969), 332–349.

[47] S. Mazurkiewicz, W. Sierpiński, *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables*, Fund. Math. 1 (1920), 17–27.

[48] R. D. McWilliams, *On projections of separable subspaces of (m) onto (c)*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 872–876.

[49] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 183, Springer-Verlag, New York, 1998.

[50] E. Michael, A. Pełczyński, *Separable Banach spaces which admit ℓ_∞^n approximations*, Israel J. Math. 4 (1966), 189–198.

[51] A. A. Miljutin, *Isomorphisms of spaces of continuous functions on compacts of power continuum*, Teor. Funkc. Funkc. Anal. i Pril. 2 (1966), 150–156.

[52] M. I. Ostrovskii, *Paths between Banach spaces*, Glasgow Math. J. 44 (2002), 261–273.

[53] A. Pełczyński in collaboration with Cz. Bessaga, *Some aspects of the present theory of Banach spaces*, Oeuvres Stefan Banach, Vol. II, 221–302, PWN, Warszawa, 1979.

[54] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand, 1966.

[55] Ł. Piasecki, *On Banach space properties that are not invariant under the Banach-Mazur distance* 1, J. Math. Anal. Appl. 467 (2018), 1129–1147.

[56] Ł. Piasecki, *On ℓ_1-preduals distant by* 1, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 72 (2) (2018), 41–56.

[57] Z. Semadeni, *Free compact convex sets*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1964), 141–146.

[58] Z. Semadeni, *Banach Spaces of Continuous Functions*, Monografie Matematyczne, vol. 55 (1971).

[59] M. H. Stone, *Applications of the theory at boolean rings to General Topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375–481.

[60] L. Veselý, *Boundary of polyhedral spaces: an alternative proof*, Extracta Math. 15 (2000), 213–217.

[61] M. Zippin, *On some subspaces of Banach spaces whose duals are L_1 spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), 378–385.

[62] M. Zippin, *Correction to "On some subspaces of Banach spaces whose duals are L_1 spaces"*, Proc. Amer. Math. Soc. 146 (2018), 5257–5262.

Spis treści